إتقان الأرقام

أصبحت الرياضيات اليومية بسيطة

أندرو جيفري

ترجمة: محمد رمضان

إتقان الأرقام

أصبحت الرياضيات اليومية بسيطة

أندرو جيفري

ترجمة: محمد رمضان

دار جامعة حمد بن خليفة للنشر
HAMAD BIN KHALIFA UNIVERSITY PRESS

«الأرقام تحكم الكون».

فيثاغورس (c.570 - c.490bc)

إهداء إلى أليسون، ويليام ودانيال

مقدمة

تعدُّ الرياضيات فنًا وعلمًا ولغة، وهي خصائص لربما تشترك فيها فقط مع الموسيقى. وتجعل هذه الخواص من عالم الأرقام شيئًا مذهلًا وأخّاذًا. ومع هذا فإنّ العديد من الأشخاص الأذكياء ينتابهم خوف غير مبرر من الرياضيات، يمكن تجنبه، يمنعهم من اكتشاف مواطن القوة والجمال والمتعة في هذا الحقل وأنماطه.

لا يمكن، أو لا يمكن بعد؟

عندما طُلب مني أن أكتب هذا الكتاب، لم أتردَّد في القبول. إذ بدا طرحه المركزيّ متوافقًا بشدة مع كل ما كان قد تشكَّل لديّ من معتقدات حول نظرتنا للرياضيات وكيفية تعلّمنا لها. فكثيرًا ما يفترض المرء مثلًا أن الوقت قد فات على تعلُّم حب الأرقام. فإذا كنت قد عانيت مدرسيًا مع هذه المادة، قد تظن، وأنت جدُّ مخطئ إن فعلت، أنك لن «تفهم أبدًا». وقد تُغالي وتجد الراحة في ادّعاء أنك لا تحسن التعامل مع الأرقام لكونك ولدت مع نوع من «العمى العددي» (وهذا أمر موجود فعلًا، - انظر الصفحة 146 – لكنه في الغالب ليس أرجح الأسباب وراء مشاكلك مع الرياضيات). فأنا نفسي لا أستطيع تعداد (!) المرات التي يخبرني فيها أحد أن الرياضيات، بالنسبة له أو لها، واجب ممل، وليست تمرينًا ممتعًا، وذلك عادةً بسبب أسلوب تدريسها. فمن الطبيعي عندما لا نفهم أساسيات موضوع ما فهمًا صحيحًا أن نعاني مع ما يتبعها من مفاهيم. ومع ذلك فالفرصة دائمًا سانحة للبدء من جديد، وأظن أن هذا الكتاب سيوفر فرصة ممتازة لإعادة التوازن، وإظهار قدرة الأرقام على الإمتاع.

يهدف هذا الكتاب إلى مساعدتك على التعامل مع الأرقام بثقة ومتعة، وذلك عن طريق أساليب غاية في السهولة غالبًا. فعلى سبيل المثال، هل يمكنك العدُّ من واحد لألف؟ هل سبق وأن فعلت ذلك؟ وان كنت قد أجبت عن السؤال الأول بنعم والثاني بلا، فالسؤال التالي يكون: لماذا تعتقد جازمًا أنك قادر على عمل شيء لم تجربه من قبل فعلًا؟ والجواب هو أنك استطعت أن تميز أن الأرقام تشكل أنماطًا، وان لم تكن مدركًا لذلك تمامًا. وتشكّل كيفية توافق هذه الأنماط وعلاقاتها بعضها بعضًا جوهرَ علم الرياضيات.

وشيئًا فشيئًا تصبح الأنماط التي كنت تجدها موارِبة مستعصية على الفهم سهلةً، لدرجة أنك لا تعود بحاجة إلى التفكير فيها. لذا لا داعي أبدًا لتخوّفك من مسائل رياضية لم تتجهَّز لها بعد.

سحر الأرقام

ستجد العديد من الإشارات إلى الأنماط في هذا الكتاب. إذ تعدُّ القدرة على التعرف على نمط، ثم استخدامه لإيجاد القيمة التالية مهارة أساسية، سواء كنت تتعامل مع أرقام أو حروف أو أشكال أو ألوان. وكمثال توضيحي بسيط، انظر إلى النمط التالي:

أحمر، أسود، أحمر، أسود، أحمر، أسود، أحمر، أسود، أحمر، أسود

ما اللون التالي؟

ما اللون الرقم مئة في التسلسل؟

اللون رقم مئة في التسلسل هو الأسود بالطبع، لكن كيف تعرف ذلك؟ الجواب هو أن الرقم مئة عدد زوجي، وكل ثاني لون هو أسود. وها أنت قد بدأت بهذه الطريقة تفكّر بشكل رياضياتي. ويخبّئ هذا المثال على بساطته حقيقة أكبر: فتحليلنا للنمط يمكننا من تحديد القيم المتقدمة جدًا في هذا التسلسل بكل ثقة – فمثلًا اللون رقم 1286295 في التسلسل هو الأحمر (عدد مفرد). إذًا ما يمنح الرياضيات جلَّ قوتها وجمالها هي تلك القدرة على التنبؤ بنتائج مؤكدة. وكما يقول آينشتاين: «الرياضيات البحتة هي - على طريقتها الخاصة - شعر الأفكار المنطقية».

بما أنني مارست السحر كمهنة، وقد أصبحت أُعرف لاحقًا في مدارس أوروبا بـ«ساحر الرياضيات»، فلطالما وجدت المتعة في الخدع الرياضية، وكثيرًا ما استعنت بها خلال مسيرتي التدريسية الممتدة على مدار عشرين عامًا، وذلك لاستكشاف مفاهيم جديدة برفقة حصصي الصفية. وأدهشني مدى الاستحسان الذي لاقته هذه الدروس، وكم أن هذه الخدع مكّنت العديد من الأطفال من السيطرة على مفاهيم صعبة. ولا شك أن هذه الحيل قد تنجح معك كما نجحت

معهم. ولأساعدك على أن تصبح ساحر أرقام حقيقيًا، تجد فيما يلي بعض الخدع السحرية/ الرياضية البسيطة والمدهشة، التي يمكنك أن تجربها على أصدقائك وأفراد عائلتك.

ما هو حقيقي، ما هو ذو صلة، وما لا يمكن وصفه سوى بالمبهر

تهدف كل من الخدع والأحاجي والتمارين إلى اختبار استيعابك للرياضيات وتقويته. فمن المؤمَّل - من خلال تأديتك لها - أنك ستدرك أن العديد من المفاهيم الرياضية التي كنت تعتبرها صعبة للغاية، ليست سوى امتداد لمفاهيم أخرى أبسط بكثير، تفهمها بالفعل. وعلى سبيل المثال، ستجد أنك إن كنت تعرف كيف تضرب بـ اثنين وتقسم عليه، وكذلك بـ عشرة وعليها ، فأنت قادر على إتمام أيّ عملية حسابية من حياتك اليومية تقريبًا، ذهنيًا. وستكتشف فائدة ذلك عندما تقوم بالتسوق أو إنجاز معاملات بنكية أو أيّة مهام يومية أخرى من تلك التي تستلزم التعامل مع الأرقام كحساب إكرامية النادل دون الحاجة المحرجة لاستخدام آلة حاسبة، كما أنك ستعرف مباشرة إذا ما كان عرض ما مغريًا أم مجرد محاولة لاصطياد الزبائن.

لكن علاوة على تعلُّمك العديد من الطرق المختصرة التي ستسهِّل عليك حياتك بعض الشيء، ستستعرض بعض المعلومات الرياضية المثيرة، ومنها، كيف تعامل الإنسان مع مشكلة الصفر قبل اكتشافه وحقيقة ندفة الثلج ذات المحيط اللامتناهي، ومتى يتوجَّب عليك تكذيب آلتك الحاسبة.

عادة ما تصْدُق عبارة «لن تلزمني معرفة هذا أبدًا عندما أصبح ناضجًا»، التي يكررها الطلاب مرارًا، لكن من المرجح أنه سيدهشك مدى تأثير الأرقام في كافة جوانب الحياة. فالأرقام تحيط بكل شيء. وكثيرًا ما يلجأ الساسة وخبراء التسويق إلى الإحصائيات، وذلك لإقناعنا أو لتبرير ما يتخذونه من قرارات. فقد لا تكون الاحتمالات دائمًا كما نتوقعها. ومع نهاية الفصل الرابع، ستكون مستعدًا لتأمُّل الدور المؤثِّر الذي تلعبه الأرقام في العالم.

ما أرجوه من هذا الكتاب هو ألا يفيد فقط كل من لديهم رغبة في التغلب على شعور بالنقص عند التعامل مع الأرقام، بل وأن يشعل أيضًا حماسة من سبق وأتقنوا هذا الفن. فلتتجول أيُّها القارئ في بعض الأصقاع الغريبة التي قد تقتادك الأرقام إليها، ولتستمتع بخواصِّها السحرية. وفيما يتعلق بي شخصيًا، فقد أعدت بالفعل اكتشاف حقائق وخدع لطالما كنت قد نسيتها، واكتسبت معارف جديدة، وأدركت أن أمورًا لطالما آمنت بها، لم تكن في الحقيقة صحيحة تمامًا. وآمل أن تحاكي تجربتك ما سبق. ولتكن مستعدًا لشيء من التحدي والدهشة والانبهار وأنت في طريقك نحو اكتشاف أو (إعادة اكتشاف) عالم الأرقام الرائع.

1
الأرقام: رعب أم مرح؟

إذا كنت تعتبر درس الرياضيات أسوأ ما يخبئه الأسبوع، أو إذا كنت تتذمّر عند اضطرارك لحساب إكرامية النادل أو محاولة استيعاب تبعات تغيُّر سعر الفائدة، فمن المحتمل أن يكون لديك خوف غير مبرر إطلاقًا من الأرقام، لكن التعامل مع الأرقام في الحقيقة أمر مريح ومطمئن للغاية، ويكمن ذلك في إمكانية التنبؤ بها واستقرارها الدائم. فمثلًا، 64 مضروبة في 15 تساوي 960 في كل مرة، ولا يختلف هذا بحسب التأويل أو تغيُّر الأهواء. وسيستعرض هذا الفصل كيفية التفكير في الأرقام، كما سيبين لك كيف تطوِّعها بحيث تعمل لصالحك.

المشكلة مع الأرقام

كثيرًا ما نفترض أن الوقت قد فات على تعلُّم حب الأرقام فإذا كنت قد عانيت مدرسيًا مع الرياضيات، قد تظن، وأنت جدُّ مخطئ إن فعلت، أنك لن «تفهم أبدًا»، لكن الفرصة دائمًا سانحة للبدء بتأمُّل الأنماط الكامنة من وراء الأرقام وطريقة توافقها بل وكيفية توظيفها. وهذا ما يهدف له هذا الكتاب.

رؤية الأرقام على حقيقتها

افترض أن 114 شخصًا يرغبون في المشاركة في بطولة ويمبلدون لهذا العام عن الفئة الفردية للرجال. إذًا سيحتاج ذلك لبعض المباريات التأهيلية قبل الوصول إلى دور الـ 64، ثم دور الـ 32، مرورًا بالدور ثمن النهائي، ثم ربع النهائي، ونصف النهائي، وأخيرًا، الدور النهائي. فإن طُلب منك أن تحسب كم مباراة سيلزم، كيف ستتصرف؟ ربما ستحاول إيجاد عدد المباريات التي يجب لعبها في الدور الأول وكذلك لكل من الأدوار التالية ثم تقوم بجمع المحصلة، وهذا أمر مربك ومفتوح على الخطأ. إن هناك طريقة أسهل فلتسأل نفسك بدايةً: ما الهدف في النهاية؟ والجواب هو أن يكون هناك فائز واحد بالبطولة، ما يعني خروج 113 شخصًا مغلوبين في التصفيات. وبما أن كل مباراة تخرج خاسرًا واحدًا بالضبط، فيجب أن تلعب 113 مباراة بالتمام والكمال، بسيطة!

نميل طبيعيًا كبشر لقول «لا أستطيع» عندما نواجه أمرًا يخيفنا، ويصدق هذا تمامًا على الرياضيات. فكلنا تعلمنا بطرق مختلفة، وهو ما ساهم - دون أيّ شك - في أن يتكوَّن لدى كل منا منظور مختلف عن الأرقام. وبذلك، كثيرًا ما نحمل معتقدات مبنية على خطأ حولها، مثل اعتقادنا بضعف قدرتنا على التعامل معها. وهذا ما يجعل الأرقام والرياضيات تبدو أصعب من ما هي عليه. ويواجه حتى الأشخاص الأذكياء جدًا بعض التعقيدات مع الأرقام، لكن بمساعدة القليل من الفهم للأنماط الرقمية (بدلًا من الاعتماد على بضعة قوانين من أيام المدرسة لا معنى لها ولا تذكرها جيدًا أصلًا)، ستجد أنك أفضل جاهزية بكثير للنجاح. فبدلًا من أن نكرر «لا أستطيع»، دعنا نقُلْ «لا أستطيع بعد، لكن إن تمكنت من التعرف على النمط العامل هنا»

ما مدى ارتياحك للتعامل مع الأرقام؟

الاختبار التالي غير اعتيادي في أن أجوبته ليست أهم ما هو منشود منه. فما يهم هنا هو كيفية حلك له: هل ستلجأ للآلة الحاسبة، أم ستعثر على طريقة مختصرة؟ لكل من المسائل الآتية، أوضِح كيف عثرت على الحل. وبعد قيامك بذلك، سنُبيّن تحليل للطرائق التي اتبعتها مدى شعورك بالراحة عند التعامل مع الأرقام. بالتوفيق، وتذكر أنك لست بحاجة لعلامة كاملة في هذا الاختبار- ولعلك تفاجئ نفسك!

1. ما ناتج 23 مضروبة بـ 99؟
2. 300 ÷ $^1/_3$ = ؟
3. كم مكعبًا بحجم واحد سنتيمتر مكعب يلزم لبناء مكعب بضلع طوله سبعة سنتيمترات؟
4. يُعلِّب مزارع إنتاجه من البيض في صناديق يتَّسع الواحد منها لـ 48 بيضة. كم صندوقًا يلزم لتغليف 472 بيضة؟
5. ما مجموع جميع الأعداد في التسلسل من واحد إلى عشرين؟

الأجوبة، والأهم، لماذا:

1. **2277**

إن وصلت إلى الجواب الصحيح بضرب العددين، امنح نفسك **ثلاث نقاط**. أما إذا حاولت ولم تصل للنتيجة نفسها، امنح نفسك **نقطتين**. وإن أدركت أن العملية تكاد تكون 23 × 100، وبذلك يمكن الوصول إلى الحل بحساب 2300 - 23، امنح نفسك **أربع نقاط**.

2. **900**

إذا أجبت بـ 100، فاعرف أنك لست وحيدًا، فالعديد من الناس لا يفهمون القسمة. وربما من الأسهل التفكير بالقسمة على أنها «توزيع على مجموعات»: تخيّل أن لديك 300 بيتزا، كل واحدة مقسمة إلى ثلاث، سيسهل عندها رؤية أن هنالك 900 قطعة من البيتزا. مهما كان جوابك بعيدًا، امنح نفسك **نقطتين** للمحاولة. أما إذا حصلت على الإجابة باستخدام الآلة

الحاسبة، امنح نفسك **ثلاث نقاط**. واجعلها **أربع نقاط** إن وصلت إلى الجواب الصحيح بأيّ طريقة أخرى.

3. **343**

إن فكّرت في الحل بتخيّل شريحة مربعة بمساحة 7 × 7 سنتيمترات ومكونة من 49 مكعبًا صغيرًا، ثم أدركت أنك بحاجة إلى سبع شرائح للحصول على المكعب الكبير، فإنك تستحق **ثلاث نقاط**. فأنت تتعلم بصريًا. وإذا حللت المسألة بطريقة أخرى أدت إلى 7 × 7 × 7، فاحصل أيضًا على **ثلاث نقاط**. وإن استعملت الآلة الحاسبة وأصبت، امنح نفسك **نقطتين**. أما إذا حاولت وحصلت على جواب خاطئ، امنح نفسك **نقطة واحدة**. ويمثل المكعب الكبير كيفية تعلُّم الرياضيات - إذ نبدأ بمفهوم غاية في البساطة، ونبني عليه باقي معرفتنا.

4. **عشرة صناديق**

إن عثرت على الحل بقسمة 472 على 48، سواء على ورقة أو مستعينًا بالآلة الحاسبة، امنح نفسك **نقطتين**. أما إذا حصلت على جواب خاطئ، أعط نفسك **نقطة واحدة**، إلا إذا كان جوابك هو 9.83333، عندها لا تُعطِ نفسك **أيّة نقاط**، إذ يقتضي المنطق أن يكون الجواب عددًا صحيحًا. وهذا يبين مشكلة يتكرر حدوثها عند تعلم الرياضيات، إذ ننسى أن نسأل أنفسنا فيما إذا كانت الأجوبة التي نصل إليها تبدو منطقية بالفعل، ويُعزى هذا عادة لانعدام ثقتنا بقدراتنا الحسابية. أخيرًا، إن أدركت أن 480 بيضة تحتاج لعشرة صناديق، وأن تسعة لن تكفي (لـ 472 بيضة)، امنح نفسك **ثلاث نقاط**.

5. **210**

إن وصلت إلى الجواب بجمع الأعداد تصاعديًا أو تنازليًا، امنح نفسك **نقطتين**. وإن حصلت على جواب خاطئ باستخدام الطريقة نفسها امنح نفسك **نقطة واحدة**. أما إذا جمعت الأعداد بترتيب مختلف بغية تسهيل الأمور بعض الشيء، أعط نفسك **أربع نقاط**، حتى لو كان جوابك غير صحيح في النهاية. (انظر الصفحة 24 لمعرفة كيف أدهش كارل فريدريش غاوس أستاذه بجمع جميع الأعداد من واحد لمئة في أقل من دقيقة!).

اجمع علاماتك.

إذا كان مجموعك بين صفر وست نقاط، فلعلك لم تحاول الإجابة عن الأسئلة جميعها. وهناك عدة تفاسير لذلك، منها: انعدام الثقة بالنفس أو قلة الصبر، أو أنك شعرت بأنك عالق. وقد مُنحت نقاطًا لإجابات خاطئة لكي تدرك أهمية حقيقة أن الإجابات الخاطئة هي مجرد زلّات: ولذلك فإن الجواب الخاطئ أفضل بكثير من ألّا تُجيب إطلاقًا. وكثيرًا ما نفشل ليس لأننا حاولنا، بل لأننا لم نجرؤ على المحاولة.

إذا كان مجموعك بين سبع واثنتي عشرة نقطة، فمن الأرجح أن لديك عددًا من الطرق التي تتذكرها من أيام المدرسة، وتحب الاعتماد عليها، لكنك ربما لم تتعلّم تحديدًا ما الذي يجعل هذه الطرق ناجحة، أو فيما إن كان هناك طرق أبسط أو أنسب لحل هذه النوعية من المسائل. وسيساعدك هذا الكتاب حتمًا على التغلب على هذه الصعوبات. كما يبدو من مجموعك أنك لم تتوجّس من تجربة مسائل لم تكن متأكدًا من قدرتك على حلها – وهذا مؤشر جيد جدًا.

إذا كان مجموعك بين ثلاث عشرة وعشرين نقطة، فمن الممكن أن تكون مفكرًا جانبيًا، ولا شك سيتيح لك الاستمتاع بالكثير من الأفكارالرياضية الواردة في الفصول اللاحقة.

يسلّط النمط غير الاعتيادي لتوزيع العلامات الضوء على مدى أهمية أن تحاول رغم كل شيء، وعلى الفارق الكبيرالذي تلعبه طريقة تناولك للأرقام في حظوظ نجاحك. فالعثور على طرق مختصرة وإدراك المطلوب فعلًا، وعدم الانهيار أمام ما يبدو أنه «أرقام صعبة»، كل هذه المهارات تساعد على فكّ ألغاز الرياضيات، بل ستجعل منك ساحر أرقام أيضًا.

ملاحظة: لا عيب في استخدام آلة الحاسبة: فأنا مثلًا أقوم بذلك طيلة الوقت، لكن العبرة هي في انتقاء الوقت المناسب كما سنرى في الفصل الثاني.

الأرقام كمفهوم

يُعدّ إدراك واقع أن العقل البشري لا يفكر رقميًا إطلاقًا، وإنما صُوَريًّا فقط، أحد أكبر النقلات لمن عانَوْا مع الأرقام في السابق.

الأرقام كوحدات مستقلة

حتى يتمكن العقل تمامًا من مفهوم ما، يحتاج إلى أن يبني صورة ذهنية عنه. فعادة ما ترجع معاناتنا عند التلاعب مع الأرقام إلى عدم قدرتنا على تصور «شكلها». إذن نحن بحاجة بناء ما يعرف بـ «صورة مفهومية» لكل رقم في أذهاننا.

نتعلَّم في سن مبكرة جدًا أن العدد «3»، على سبيل المثال، يصف خاصية ما لمجموعة من الأشياء (عددها). وبهذا الإدراك نكون قد قطعنا فقط جزءًا من الطريق، وذلك عبر تمكننا من استخدام الأرقام كصفات: ثلاثة طيور، عينان.

أما التطور التالي في إدراكنا، الذي يمكن أن يحدث عند أيّ سن، لكن في العادة بين سن الرابعة والسابعة، هو انتقالنا من التفكير في الأرقام كمجرد صفات إلى استيعابها كمفاهيم مستقلة. فمن الصعب حتى أن نجمع 23 و 13 إذا كنا نراها فقط كمجموعة أشياء. وعلى هذا يسهل بشكل كبير التعامل مع الأرقام عندما يتمكّن العقل من تكوين صور عنها كأفكار مجردة. وإلى أن تحدث هذه النقلة في تفكيرنا، يبقى تحليل الأرقام أمرًا لا معنى له وبذلك، شيئًا صعبًا جدًا.

5 أو V أو ㊄

لا تحمل الأشكال التي نستخدمها لتمثيل الأرقام (1، 2، 3، 4، 5، إلخ) معنى كامنًا بحد ذاتها - وإنما فقط ما نُحَمّلها نحن من دلالة. ويمكن أن تتمثل هذه الدلالة، أو القيمة، بعدة طرق - كأن نعبّر عن الرقم 5 باستخدام نقاط على حجر نِرد، أو أصابع يد مفرودة. وفي العنوان أعلاه، استخدمنا الشكل المعتاد (الغربي الحديث وهو أيضًا- بل أصلًا- الحرف العربي؟) بالإضافة إلى ما يكافئه في الأحرف الرومانية القديمة والأحرف الصينية. وعلى النقيض من ذلك، يمكن أن يحمل الحرف نفسه معاني مختلفة: كقيمة مالية أو للإشارة إلى الوقت أو رقم لاعب في فريق إلى آخره.

فكّر في المسائل التالية: (مفتاح الحل صفحة 149)

- إذا كان مقابل 3 هو 4 ومقابل 6 هو 1، فما مقابل 5؟
- أي من الآتي يخالف القاعدة:

12 ÷ 60

500.55 - 5,550.55

12.5 من 40%

9,997 - 10,002

ساعة و44 دقيقة و28 ثانية + 3 ساعات و15 دقيقة و32 ثانية

- متى يمكن اعتبار (5 = 41) تعبيرًا صحيحًا؟ (أو، للتسهيل، متى تساوي (أي 5) -15؟)

التمثيل والعلاقات

كما تصبح علاقاتنا مع البشر أكثر توطدًا كلما ازدادت معرفتنا بهم، يتعمَّق فهمنا للأرقام بازدياد الوقت الذي نمضيه في التمعُّن فيها بطرق عديدة ومختلفة. فإذا حدَّدنا فهمنا للرقم 5 على أنه «عدد البطات في أغنية»، سيصعب لاحقًا تصوُّر أنه يمكن أن يكون أيضًا، على سبيل المثال، نصف 10، أو واحدًا بالمئة من 500. وهذه أخبار طيبة لمن عانَوْا سابقًا مع الأرقام: إذ ستتعزز ثقتك بقدراتك الرقمية بتوسُّع خبراتك ومداركك لأوجهها المتعددة.

سلوكات الأرقام

تتحسّن حظوظك في اكتشاف طرق مختصرة فعالة كلما ازدادت معرفتك لمدينة ما، وذلك بامضاء المزيد من الوقت هناك. فتجد أنك بدَأت برسم خريطة ذهنية لمسار الطرق التي تسلكها، بل وستتنبه لعلاقات بينها لم تكن تدري بها إطلاقًا. وينطبق الأمر نفسه على الأرقام.

قابلية الأرقام على التنبؤ بها

لربما يكون أحد أهم السبل نحو استيعاب الأرقام هو إدراك أنها تتخذ شكل أنماط بل وتتبع قواعد بسيطة جدًا. فمتى فهمت هذه الأنماط وهذه القواعد يستحيل نسيانها.

والأنماط الكامنة وراء الأرقام لا حصر لها ولتنوعها فهي تتراوح ما بين ما هو بسيط للغاية، وصولًا إلى ما يبدو غاية في التعقيد والجمال. وسنستعرض بعض هذه الأنماط هنا، وفي باقي صفحات الكتاب، التي سيساعدك التمكن منها أكثر بكثير من محاولة تذكر ما يمكن أنك قد تعلمته في المدرسة.

تُسَهّل الأنماط الحسابية التالية التعامل مع أكبر الأعداد وأطولها وبعضها تعرفه غالبًا.

- لضرب عدد ما بعشرة فقط أضف صفرًا. وللضرب بمئة أضف صفرين.
- إذا قبلت آخر خانة في عدد ما القسمة على اثنين، فإن العدد برمّته زوجي، وبذلك يقبل القسمة على اثنين دون باقٍ ومهما بلغ طوله.
- إذا انتهى عدد ما بخمسة أو صفر، فإنه يقبل القسمة على خمسة.
- إذا جُمع عددان فرديان، فإن الناتج دائمًا عدد زوجي.
- إذا كان مجموع كل خانات عدد ما يقبل القسمة على ثلاثة، فإن العدد نفسه يقسم على ثلاثة أيضًا (وبذلك بإمكانك أن تعرف بلمحة أن العدد 287,511، مثلًا، يُقسم على ثلاثة دون كسور).
- وبالطريقة نفسها، فإن الأعداد التي مجموع خاناتها تسعة أو أحد مضاعفاتها تقبل هي أيضًا القسمة على تسعة.
- اقسم مجموع آخر ثلاث خانات عدد على اثنين ثم اقسم الناتج على اثنين أيضًا. إذا كان الناتج الجديد عددًا زوجيًا، فإن العدد الأصلي يقسم على ثمانية.
- احذف آخر خانة من عدد ثم اضربها باثنين، واطرحها ممّا تبقى من العدد الأصلي بعد الحذف. كرّر العملية إلى أن تتبقى خانة واحدة فقط. إذا كان الناتج -7 أو صفرًا أو 7، فإن العدد الأصلي يقبل القسمة على سبعة.

خدعة رقم الهاتف

حتى رقم هاتفك يمتلك خواصّ يمكن التنبؤ بها.

دَوّن آخر ست خانات. أعد ترتيبها لتحصل على رقم مختلف، ثم اطرح الرقم الصغير من الكبير، والآن اجمع خانات العدد الناتج - هل حصلت على 27؟ يُحدث هذا عددًا هائلًا من المرات؛ في حين أن 18 أو 36 نتائج أكثر ندرة، ونادرًا جدًا ما تحصل على 9.

وهنا مثال باستخدام الرقم 731117:

أعد ترتيب الخانات لتحصل على 317171.

$$\begin{array}{r} 731117 \\ \underline{-317171} \\ 413496 \end{array}$$

$$4 + 1 + 3 + 4 + 9 + 6 = 27$$

اختر عددًا

بقليل من الدراية بسلوكات الأرقام، يمكنك استخدام آلتك الحاسبة للقيام بخدع تنبؤية بسيطة. جرّب الآتي على صديق لك.

سحر قراءة الأفكار

دون أن يرى صديقك، دَوّن العدد 37 على ورقة، واقلبها على وجهها. ثم اطلب منه اتباع الخطوات التالية.

- أدخل رقمًا ما على الآلة الحاسبة ثلاث مرات: مثلًا 555.
- اجمع الأرقام الثلاثة (مثلًا 5 + 5 + 5 = 15).
- اقسم العدد من الخطوة الأولى على الناتج في الخطوة الثانية (مثلًا 555 ÷ 15).

أَرِ صديقك ما كتبت في الورقة.

تكمن الخدعة في أن الأعداد المكونة من ثلاث خانات متماثلة هي مضاعفات للعدد 111، و 111 = 37 × 3. وعند جمع الخانات، فإنك كما لو قمت بضرب الرقم الأصلي (أي 5) بثلاثة. وفي الخطوة الأخيرة، تقوم عمليًا بقسمة العدد المكوَّن من ثلاث خانات متماثلة على إحدى هذه الخانات (أي 5)، وهكذا تصل إلى 111 ثم تقسم مجددًا على 3 والناتج 37.

عظمة الرقم تسعة

- اختر رقمًا (من خانة واحدة). اضربه في ذهنك بتسعة.
- استخدم آلتك الحاسبة لضرب الناتج بـ 12,345,679.

سيظهر على آلتك الحاسبة الرقم الذي اخترته مكررًا تسع مرات.

يحدث هذا نتيجة لحقيقة بسيطة، لكن غير معروفة من قبل الكثيرين: وهي أن 12,345,679 × 9 = 111,111,111. وبذلك فإنك بكل بساطة ضربت 111,111,111 بالرقم الذي اخترته. فمثلًا لو اخترت 8، ستحصل على 888,888,888.

أنماط الأرقام

تسود الأنماط في جميع أنحاء الرياضيات. فتشكل جداول الضرب والمتتاليات والمتسلسلات الحسابية والمربعات اللاتينية، وغيرها من الأنماط الرياضية المعروفة أساس تطبيقات رقمية متنوعة من حياتنا اليومية كلعبة السودوكو والباركود (أو الرمز الشريطي) ومقياس رسم الخريطة. ويقبع جوهر التعلم الرياضي في فهم القواعد التي تحكم هذه الأنماط.

عبقرية لحظية

إنه العام 1784. يلاحظ الأستاذ بامتعاض أثناء توزيعه لمسائل الرياضيات لذلك اليوم أن كارل فريدريش ذا السبعة أعوام قد انتهى من حلها. فيقرر أن يعطيه مسألة صعبة لدرجة تضمن بقاءه هادئًا طيلة اليوم.

«هيا يا غاوْس، أريد منك قبل أن تعود إلى المنزل اليوم أن تجمع الأعداد من واحد إلى مئة. وعندما تنتهي من ذلك، يمكنك أن تنصرف.»

«خمسة آلاف وخمسون، أستاذ.»

«ماذا قلت؟»

«خمسة آلاف وخمسون، أستاذ. أليس هذا ما حصلت عليه؟»

«لكن، أنا، في الحقيقة، لا عليك هيا اذهب يا غاوْس.»

إذَن، كيف تمكن غاوْس من ذلك قبل اختراع الآلات الحاسبات الإلكترونية بقرون؟

- تخيّل شريطًا ممدودًا مكتوبًا على طوله الأعداد من واحد إلى مئة، بحيث يكون العدد واحد في أقصى اليمين والعدد مئة في أقصى الشمال.
- والآن تخيّل شريطًا مماثلًا موضوعًا أسفل الشريط الأول مكتوبًا عليه الأرقام نفسها لكن بالعكس، أي مرتّبة تنازليًا، بحيث يكون 1 تحت 100 و 2 تحت 99 وهكذا على امتداد الشريطين إلى نهايتيهما. وينتج عن ذلك مئة زوج من الأعداد، بحيث يكون - وهنا النقطة الجوهرية - ناتج مجموع كل منها متساويًا: 101.
- إذَن مجموع كل هذه الأزواج = 100 × 101 = 10,100.
- وبما أننا مهتمون فقط بمجموع الأعداد على شريط واحد، نقوم ببساطة بأخذ نصف النتيجة، لنحصل على جوابنا: 5,050.

والواقع أن غاوْس استخدم فقط سطرًا واحدًا من الأعداد، قام بطَيّه ذهنيًا من المنتصف. وذلك أصعب على التخيّل لكنه يُفضي إلى الشيء ذاته. ونشأ «ك. ف. غاوس» (1777-1855) ليصبح أحد أعظم علماء الرياضيات في عصره.

الاستفادة من الأنماط

أبسط الأنماط هو العدّ تصاعديًا، 1، 2، 3، 4، 5، 6، إلخ. وإنّ فهمَنا للنمط هو ما يمنحنا الثقة بأننا لو طقنا ذلك، يمكننا العدّ لألف، أو حتى للمليون، دون أيّ صعوبة تذكر. وتعين الأنماط في الحساب بطرق قد تكون مفاجئة أحيانًا، كما يوضّح المثال الآتي.

ميزان الجمع

بدون أن تجمعها فعلًا، أيّ من التالي برأيك يعطي مجموعًا أكبر:

20 + 19 + 18 + 17 + 16

أو

24 + 23 + 22 + 21؟

هناك إجابتان فطريتان لهذا السؤال: إما الأولى، لأن هناك أعدادًا أكثر، أو الثانية، لأن الأعداد الموجودة أكبر قيمة. أو بالطبع لعلك أيضًا قد حزرت أنهما متساويتان. وهذه امتداد للنمط التالي:

$$1 + 2 = 3$$

$$4 + 5 + 6 = 7 + 8$$

$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$$

أيمكنك التنبؤ (والتحقق) من محتوى السطر الخامس؟

المربعات اللاتينية

وهي مربعات تحتوي مجموعة محددة من الأعداد، أو أية رموز أخرى، بحيث لا يتكرر الرمز نفسه في أيّ سطر أو عمود. وفي التالي مثال بسيط.

1	2	3	4
4	1	2	3
3	4	1	2
2	3	4	1

ولعبة السودوكو أحجية مبنية على المربعات اللاتينية، وتُعدّ دليلًا على انبهار العقل البشري بالأنماط. ومن ضمن ما سيرد في الكتاب من علاقات وأنماط رقمية مبهرة نذكر متتالية فيبوناتشي (صفحة 52)، وعدد باي (pi) (أو ط) (صفحة 68)، والنسبة الذهبية (صفحة 70)، والباركود (أو الرمز الشريطي) (صفحة 98).

المتتاليات العددية

تعرف أكثر المتتاليات شيوعًا بـ «المتسلسلات الحسابية»، وتزداد أو تنقص قيمة الأعداد فيها بمقدار ثابت. فمثلًا:

4 7 10 13 16 19

للوضوح، نسمي الـ 4 «الحدّ الأول»، والـ 7 «الحد الثاني»، إلخ. ومن المفيد أحيانًا إمكانية التنبؤ بقيمة الحدّ المئة مثلًا. ويكون هذا عن طريق إيجاد قاعدة عامة تصف أيّ حدّ في متتالية ما بما في ذلك الحدود التي لم تُعرف قيمتها بعد؛ ويُعْرَف هذا الحدّ العام بـ «الحدّ النوني.»

ونلاحظ أن الفرق بين حدود المتسلسلة هو دائمًا 3. وينطبق هذا أيضًا على جدول ضرب الثلاثة، لهذا تبدو المتسلسلة شبيهة جدًا بجدول ضرب الثلاثة. وبمقارنتهما معًا نحصل على الآتي:

ترتيب الحدّ	1	2	3	4	5	6	ن
جدول ضرب الثلاثة	3	6	9	12	15	18	3ن
المتسلسلة	4	7	10	13	16	19	3ن + 1

وفي العمود الأخير نحاول أن نعمم النمط. فنقول: لأيّ عدد (ن)، يكون المُدخل رقم ن في جدول ضرب الثلاثة مساويًا لـ 3 ضرب ن، وتكتب على شكل «3ن» بينما يكون الحدّ رقم ن في المتسلسلة دائمًا أكثر بواحد، وبذلك يمكن القول إن الحدّ رقم ن في المتسلسلة هو 3ن + 1. والآن نستطيع التنبؤ بنسبة مئة بالمئة بأن قيمة الحدّ رقم 100 تساوي 3 × 100 + 1، أي 301. وعلى النسق نفسه الحدّ رقم 200 هو 601 والحدّ رقم 30 يساوي 91، إلخ. وبذلك نرى أن التوصل إلى القاعدة العامة (3ن + 1) يمكننا من تحديد قيمة أيّ حدّ من حدود المتسلسلة بكل سرعة وسهولة ودون اللجوء لكتابة كل حدودها.

نزع الرعب من جداول الضرب

تأخذ جداول الضرب، التي ترهب الكثيرين، فيما يعشقها قلائل، شكل شبكات أعداد تمثل متتاليات حدودها من «1ن» إلى «10ن» ويحفّز الأطفال على حفظ هذه الجداول غيبًا حتى قبل أن يفهموا المقصود منها تمامًا. ويُفلح الصغار الذين يتمكنون من التعرف على النمط في حفظها بنسب أعلى بكثير من أولئك الذين لا يوفقون لإيجاده. وبنظرة أولية، يمكن القول إن هناك مئة معادلة يمكن تعلّمها من جداول الضرب:

ويمكن في الواقع اختصار نصف الطريق مباشرة إذا لاحظنا أن الجدول متماثل قطريًا (قارن القيم الواقعة على جانبي السهم القطري). وهذا يعني أن علينا فقط تعلم نصف المعادلات، وذلك لأن النصف الثاني صورة معكوسة عن النصف الأول. فمثلًا، 4 × 7 = 28 كما أن 7 × 4 = 28 أيضًا: ليس علينا أن نحفظ كِلْتَيهما. ويضاف لهذا أن جدولَيْ ضرب الواحد والعشرة سهلان جدًا، وهكذا بقي لدينا فجأة حوالي عشرين حقيقة فحَسْب.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

أعاجيب الجداول

يحتوي الجدول على المزيد من الأنماط. فماذا تلاحظ عند تظليل الأعداد الفردية؟ لماذا يحدث هذا؟ أنظر إلى الأعداد الواقعة على السطر القطري المعلَّم بسهم هل يساعد شكل الجدول على تفسير سبب تسميتها الأعداد «المربعة»؟

وربما يكون أكثر إدهاشًا أن الجدول يصلح كما هو ك«أداة تحويل كسور». خذ مثلًا أيّ عددين متجاورين في الجدول - 4 و6 مثلًا - ورتبهما على شكل كسر: $\frac{4}{6}$. ثم انظر إلى الأزواج المقابلة لها في الأعمدة أو الأسطر، وبأيّ اتجاه، صعودًا أو هبوطًا، وستجد أن الأزواج جميعها متكافئة قيمةً - بمتابعة مثالنا عن $\frac{4}{6}$، ابتداءً ب $\frac{2}{3}$، ومرورًا ب $\frac{16}{24}$، حتى نصل إلى $\frac{20}{30}$. وكمثال آخر، يظهر الجدول مباشرة أن $\frac{24}{32}$ هي نفسها $\frac{3}{4}$، وأن $\frac{35}{40}$ تساوي $\frac{7}{8}$. ويصلح هذا أفقيًا وعموديًا على حدّ سواء.

تقدّم! (الحل في صفحة 149)

من الوارد أنه يلزمك قراءة هذا الفصل مرتين أو أكثر إلى أن تترسخ لديك معظم الأفكار التي قدّمها. وبغض النظر، جرّب المسائل التالية لتقيس مدى التقدّم الذي حققته حتى الآن. ومع أنه لن يكون هناك اختبار عند نهاية كل فصل، فستجد العديد من الدعوات لتطبق ما تعلمته، والتحديات لتختبر مدى تمكنك، في كافة أنحاء الكتاب.

1 ذهنيًا (لا تستعمل الآلة الحاسبة):
أ: اضرب 34 ب 99
ب: اضرب 3.99 ب 7
2 أ: كم تساوي 150 ÷ 2/1؟
ب: كم تساوي 200 ÷ 5/1؟
3 تمتاز الأعداد الفردية بنمط ملفت للانتباه عند جمعها:
إن ناتج جمع أول عددين فرديين هو:
1 + 3 = 4 (ويساوي 2 × 2).
أما ناتج جمع أول ثلاثة أعداد فردية هو:
1 + 3 + 5 = 9 (ويساوي 3 × 3).
فما مجموع أول مئة عدد فردي؟
4 16 معكوسة هي 61، و28 معكوسة هي 82، لكن، تحت أيّة ظروف يمكن أن تكون 16 و61 متساوية بالفعل (وكذلك بالنسبة لـ 28 و82)؟ (دليل: إن شعرت بأن هذا يبدو مألوفًا، فأنت تقترب).
5 أ: ما الحدّ المئة في هذه المتتالية؟ 7، 11، 15، 19، 23، 27
ب: وهذه متتالية أخرى: 2، 5، 8، 11، 14. كم يلزم من حدود هذه المتتالية للوصول لحدّ يساوي 146؟
6 تشتهر بعض الجرائد باختبارات السرعة من نوع «السلسلة.» ما مدى سرعتك في الوصول إلى نهايات هذه «السلاسل؟»

البداية 13	× 11	+ 1	الجذر التربيعي للقيمة السابقة	× 99	10% من القيمة السابقة	الضعف	الإجابة

البداية 340	النصف	النصف مجددًا	$\frac{1}{5}$ القيمة السابقة	× 4	× 5	الإجابة

7 ما العدد ذو الخمس خانات المفقود في الجزء المظلل من الشبكة التالية؟ فسّر إجابتك.

		2	5	
4	1		2	3
	5	4		1
5		3		2

«وكأن الرياضيات تمنح المرء ما يشبه حاسةً إضافية.»

تشارلز داروين (1809-1882)

2
الحساب بذهن صافٍ

ربما يكون أحد مصادر الحيرة التي نواجهها أثناء تعلمنا للرياضيات هو الاختلاف الشديد بين الطرق التي نتعلم فيها الحساب على ورقة، وتلك التي نتعلم تطبيقها في أذهاننا. وليس من الضروري أن يكون هذا سيئًا، لكن كثيرًا ما يتولد الإحساس بالصعوبة نتيجة اعتقادنا بالحاجة للقيام بعملية حسابية معقدة لحل مسألة ما، في حين أن هناك عادة طرقًا مختصرة أسهل بكثير للحصول على النتيجة نفسها. وسيساعدك هذا الفصل لتشعر بارتياح أكبر عند التلاعب بالأرقام، كما ستتعرف من خلاله على عمليات حسابية تُشبه السحر، تختصر بك المسافات الواجب قطعها عند القيام بالحساب التقليدي الطويل.

كلّه يدور في رأسك

ستعينك بعض الخدع والأساليب على أن تصبح متمرّسًا في الحساب ذهنيًا. فإن أخذت وقتك في التمكن منها، ستلاحظ تحسنًا كبيرًا في ثقتك بقدراتك الرقمية، وفي سرعتك ودقتك أيضًا.

المضاعفة والتنصيف

أتريد أن تعرف تكلفة علبتين، أو أربع علب، أو ثماني علب من طعام القطط بمجرد معرفة ثمن العلبة الواحدة؟ أو ماذا عن سعر فستان عليه خصم خمسون بالمئة؟ إن مضاعفة الأعداد وتنصيفها ذهنيًا وبسرعة وراء الجزء الأكبر من المرونة الذهنية الرقمية.

المضاعفة

يكمن السر وراء مضاعفة الأعداد بسرعة في القدرة على تجزئته. ويمكنك أن تقوم بذلك بالشكل الذي يريحك. فمثلًا، لمضاعفة 3.47 جنيهًا استرلينيًا، لعلك ستختار أن تضاعف 3 جنيهات على حدة، ثم 40 بنسًا، وأخيرًا 7 بنسات، من ما يعطيك 6 جنيهات + 80 بنسًا + 14 بنسًا، وهذا يساوي 6.94 جنيهًا. أو لربما تفضّل أن تفكر في القيمة الأصلية على أنها 3.5 جنيهًا ناقصة 3 بنسات، وبهذه الطريقة يمكنك مضاعفة 3.5 جنيهًا لتصبح 7 جنيهات، ثم تطرح 3 بنسات مرتين ليبقى لديك 6.94 جنيهًا. وهذه التقنية الأخيرة مفيدة بشكل خاص أثناء وجودك في أحد المتاجر التي تصمم على تسويق منتجاتها مقابل 3.99 جنيهات عوضًا عن 4 جنيهات مثلًا، آملة أن ننظر للسعر على أنه 3 جنيهات!

وتفيد أساليب المضاعفة عند التعامل مع الأرقام الكبيرة أيضًا، فمضاعفة 3,000 لا تزيد صعوبة عن مضاعفة 3. ولمضاعفة 3,462 - مثلًا - أفكر بها على أنها 6,000، و800، و124 (تذكر أنك حر في اختيارك لطريقة تجزئتك للعدد)، وجمع هذه يساوي 6,924.

تمرّن على هذه المهارة خلال الأيام القليلة القادمة كلما رأيت عددًا: فقط ضاعفه، ثم ضاعفه مجددًا. وتذكر أن تبحث عن أبسط الطرق: فيمكن مضاعفة 26 بمضاعفة 25 (وتساوي 50) وإضافة 2، مثلًا.

التنصيف

يشبه الأسلوب اللازم اتباعه في التنصيف ذلك المستخدم في المضاعفة، لكنه لا يماثله تمامًا. وقد جربت هذا الأسلوب بنجاح مع أطفال في سن الثامنة.

تخيّل أمامك خطًا أفقيًا عريضًا على مستوى نظرك وبطول ذراعك ثم تخيّل العدد الذي ترغب بتنصيفه فوق السطر، واقسم هذا العدد إلى جزأين أو ثلاثة وكما ترى مناسبًا ثم ضع هذه الأجزاء فوق السطر (أي مكان العدد الأصلي). والآن، نصّف هذه الأجزاء في رأسك وضع النواتج تحت السطر. أخيرًا، وأنت ما زلت متذكرًا لما وضعت وأين كوّم الأنصاف تحت السطر معًا واجمعها. وفي التالي عرض كيفية تنصيف 335:

5 30 300

2.5 + 15 + 150

المجموع: 167.5

تمرَّن على ما سبق لأسبوع، وستندهش من السرعة والدقة التي ستكتسبها.

جني الثمار

ستلاحظ بعد تمكنك من المضاعفة والتنصيف بكفاءة أن أمورًا حسابية أخرى لا تبدو ذات صلة قد أصبحت فجأة أكثر سهولة. فبتكرار مضاعفة الأعداد مثلًا، يمكنك أن تحسب بسرعة ناتج ضرب أيّ عدد بـ 4، أو 8، أو 16، أو 32، وهكذا. ستقوم بطبخ المعكرونة على العشاء لثمانية أشخاص والوصفة التي لديك تحدد 140 غرامًا من المعكرونة للشخص؟ لا مشكلة؛ فقط ضاعف ثم ضاعف ثم ضاعف مجددًا (280غ، 560غ، 1020غ). وبشكل مشابه يمكن إيجاد 1/4 أو 1/8 أو 1/16 إلخ، بمجرد تكرار التنصيف.

كما أنه بإمكانك تطبيق هذه الأساليب لحساب كميات أخرى ذهنيًا. فإذا أيقنت فجأة أنك أخطأت في التقدير وأن العشاء سيحضره ستة فقط فكّر في الوصفة على أنها 2 + 4. وبذلك:

ضاعف الأصل(140غ) لتحصل على الكمية لاثنين (280غ) ثم ضاعف مرة أخرى لتحصل على حصة أربع أشخاص (560غ)، وأخيرًا، اجمع الكميتين: 280 + 560 = 840غ.

حوالَيْ مئة

تصوَّر نفسك تتسوق في نيويورك وقد اشتريت ثلاثة أشياء حتى اللحظة كلفت 1.99 دولارًا، و2.98 دولارًا، و4.99 دولارًا، على الترتيب. فكيف تحسب المجموع؟ يمكنك بالطبع استخدام الطريقة التقليدية كالآتي:

1.99$
2.98$
4.99$
9.96$

لكن الأكثر فعالية هو أن تقرِّب هذه الأرقام: فهي تساوي دولارين، و3 دولارات، و5 دولارات، تقريبًا، وجمعها يعطي 10 دولارات. والآن، اجمع الكميات الصغيرة التي أهملتها لتسهيل الحساب: 1 سِنْت + 2 سِنْت + 1 سِنْت = 4 سِنْتات. أخيرًا، اطرحها من المجموع التقريبي: 10 دولارات – 4 سِنْتات = 9.96 دولارات.

أرقام كبيرة، ومخيفة

إن أحد المفاهيم المغلوطة الشائعة هو أن التعامل مع الأعداد الكبيرة أمر صعب. ويمكن دحض هذه الترهات من خلال المثال التالي. أيّ من هذه الأعداد تجد ضربها بستة في رأسك الأكثر سهولة: 0.37، أو 134، أو 1,000,000؟ لا تدع عقلك يتُه أمام سطر طويل من الأرقام: انظر إلى حقيقة العدد الذي أمامك ثم فكر في إمكانية تبسيطه.

وهذه الطريقة أسرع فعليًا من الطريقة الورقية التقليدية بل وحتى من اللجوء إلى آلة حاسبة. ولتجرب سرعتك في إيجاد مجموع تكلفة ثلاثة مشتريات سعرها 3.99 دولارًا، و4.97 دولارًا، و2.98 دولارًا.

البحث عن أزواج

لجمع عدة أعداد في رأسك ابحث عن أزواج مجموعها 10 (أو 100). فمثلًا، كيف تجمع:

20 + 40 + 32 + 80 + 60؟

يمكنك أن تقوم بذلك بشكل ميكانيكي:

20 + 40 = 60
60 + 32 = 92
92 + 80 = ... ؟

أو عوضًا عن ذلك، كن ذكيًا وابحث عن أزواج تسهّل العملية:

20 + 80 = 100
و40 + 60 تساوي 100 أيضًا

وبذلك نحصل على 200. فيتبقى لدينا فقط 32 لنضيفها قبل الانتهاء: والجواب هو 232.

ولْنُطَوِّر طريقتنا بالبحث عن أعداد تكاد تكون «صحيحة» فمثلًا، لجمع 41، و65، و59، تخيّل أنك تزيل الـ 1 من الـ 41 وتضيفها إلى الـ 59؛ وبذلك تحصل على 40 و60، وهذان أسهل للجمع. وعندها تستطيع بسرعة فائقة الوصول إلى المجموع الصحيح: 165.

والآن، استخدم هذه الطريقة لجمع 23، و34، و56، و27 ذهنيًا. (وتذكر أن الهدف هو التسهيل، فاختر أيّ ترتيب يعينك على ذلك).

مضاعفات العدد أحد عشر بسرعة البرق

لن يستغرب أحد إذا كنت تستطيع ضرب عدد ما مهما كان حجمه، بـ 10 أو بـ 100، أسرع من الآلة الحاسبة. لكن ماذا عن ضربه بـ 11؟ وإليك الطريقة.

ما أسرع طريقة لضرب 23 بـ 11؟ إحدى الطرق المختصرة هي الضرب بـ 10، ثم إضافة 23، لكن هناك طريقة أسرع: فقط اجمع الخانتين (أي 2 و3) وضَعْ الناتج بينهما:

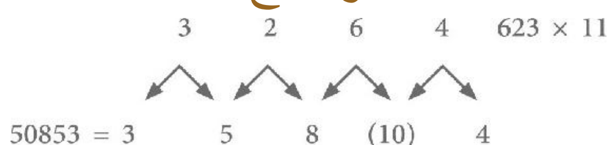
2 + 3 =5، وبذلك 23 × 11 = 253.

وإذا كان ناتج جمع الخانتين أكبر من 9، احمل الـ 1 باليد، وأضفه إلى الخانة الشمال:

84 × 11: 4 (12) 8 = 924

والآن، حاول استخدام الطريقة السحرية لضرب القيم التالية: 34 × 11، 52 × 11، 69 × 11، 85 × 11، 93 × 11.

وتصلح هذه الخدعة مع الأعداد الكبيرة أيضًا:



لكن الأعداد الكبيرة تحتاج إلى المزيد من الممارسة، إذ عليك أن تنفذ كل عملية جمع (للخانتين) في رأسك، وتتذكر في الوقت نفسه أن تحمل واحدًا باليد في كل مرة يكون ناتج الجمع أكبر من تسعة. ومع ذلك، فإنها وسيلة ممتازة لتمرين العقل، وبقدر من المراس ستجد أنك تضرب الآلاف في رأسك أسرع من الآلة الحاسبة.

تمرين «عضلات» دماغك

تعتبر ألعاب الأرقام وسيلة مناسبة لصقل المهارات الحسابية التي بدأت باكتسابها. وإليك بعضًا منها لوضعك على الطريق، وبإمكانك البحث عن مثيلاتها في الصحف وكتيبات الأحاجي وباقي المصادر المتاحة. ولْتُقَسّم تمرينك إلى مرحلتين: ركّز في المرحلة الأولى على فهم مبدأ اللعبة، ثم اسْعَ نحو الجواب الصحيح عن طريق أقصر السبل الممكنة. وفي المرحلة الثانية، ابذل ما استطعت لزيادة سرعتك دون أن تتضرر دقتك في الإجابة.

سلاسل الحساب السريع (الحلول صفحة 150)

أحجيتا «السلسلة» أدناه أكثر صعوبة من سابقتيهما في صفحة 31 - ومع ذلك، حاول أن تحلها في ذهنك. ومن الممكن أن تساعدك الأساليب التي تعلمتها على التنصيف والمضاعفة والتقريب. ما مدى سرعتك في الوصول إلى النهاية ومعرفة الجواب الصحيح؟

ابدأ بـ 20	خذ 10%	× 2	× 12	- 34	÷ $^1/_3$	خذ $^1/_7$ من القيمة السابقة	قم بتربيعها	× 99	الجواب

ابدأ بـ 7	قم بتربيعها	× 11	- 439	خذ الجذر التربيعي للقيمة السابقة	خذ 20% من القيمة السابقة	قم بتكعيبها	قم بتربيعها	+ 6	الجواب

العثور على الأنماط (الحل صفحة 150)

لكل من الأشكال التالية حدّد العلاقة الخفية التي تربط الأعداد ببعضها ثم وظفها لملء الفراغات.

أ

10	3	4
6	8	1
?	5	2

ب

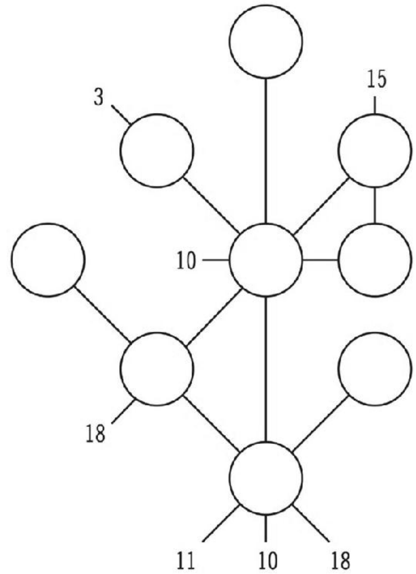
10	3	2
14	3	4
12	3	?

ج

5	4	1
39	3	6
?	3	4

خطوط متقاطعة (الحل صفحة 150)

أدخل الأرقام من واحد إلى تسعة في الدوائر الفارغة بحيث يكون مجموع ما في الدوائر المتصلة بخط مساويًا للقيمة، التي يشير إليها هذا الخط ولا تكرر استعمال أيّ رقم.

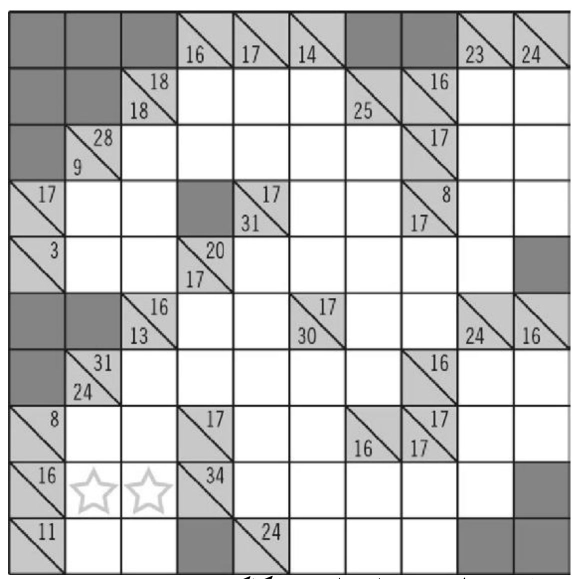


كاكورو (الحل صفحة 151)

لعلك مطلع على كاكورو وهذه الأحجية من أقارب السودوكو، إلا أنها تختلف عنها في أنك تحتاج إلى الجمع والطرح ذهنيًا، بالإضافة إلى المنطق الذي هو أساس السودوكو للوصول إلى الحل.

تُحلّ أحجية كاكورو بإدخال رقم من واحد إلى تسعة في الفراغات البيضاء جميعها. ويجب أن يساوي كل تتابع أفقي أو عمودي من الأرقام القيمة المكتوبة في نهايته عند يساره أو فوقه. كما لا يمكن تكرار الرقم نفسه في أيّ تتابع. فمثلًا، في السطر السُّفليّ فراغان يجب أن يكون مجموعهما مساويًا لـ 11. وأحدهما سيساهم في المجموع المشار إليه في الأعلى منه (24).

ويمكن البدء بالحل من الفراغين المشار لهما بنجمتين. إذ لا يمكن الحصول على 16 إلا بجمع 7 + 9 (وذلك لأن التتابع 8 + 8 ممنوع)، لكن، بأيّ اتجاه: 79 أم 97؟ نلاحظ أن الخيار الأول يضع 9 في العمود المكون من أربعة فراغات، و يجب أن يكون مجموعه 13. لكن 13 - 9 = 4 ولا يمكن الحصول على مجموع 4 بجمع ثلاثة أرقام مختلفة. والآن، أكمل حلّ الأحجية.



إذا واظبت على لعب كاكورو ستشعر بتحسن مهاراتك الحسابية الذهنية وقدرتك على التعرف على أزواج أرقام نمطية على شاكلة 22 - 6 = (7 + 9)، أو 34 - (8 + 9) = (4 + 6 + 7).

العقل الإلكتروني

الآلة الحاسبة اختراع رائع ماذا كنا سنصنع بدونها؟ لكن، مع كثرة نقاط قوتها فهي لا تخلو من مواطن الضعف. فكيف نحدد إذن متى نستعملها بل ومدى إمكانية الوثوق بأجوبتها؟

هل تصيب الآلات الحاسبة دائمًا؟

يُعتبر استخدام الآلة الحاسبة عادة أفضل وسيلة لحساب شيء ما. فمثلًا، حاول استخدام القلم والورقة لحساب تكلفة 23,587 برميل من النفط بسعر 126.16 دولارًا للبرميل الواحد. ومع ذلك، فهناك خطر كامن في الاعتماد على الآلة الحاسبة، وهو ما أُطْلق عليه بـ«متلازمة التواكل بذهن مغيَّب» أو ببساطة نقول في أنفسنا «إنها آلة، ولذلك لا يمكن أن تخطئ» أبدًا، فأنت تفوق الآلة الحاسبة ذكاءً بمراحل! ولْتتمعَّن في الآتي:

هناك إحصاء في حيّ الأعشار لمعرفة عدد السيارات التي يمتلكها سكان المنطقة. لدى إحدى العائلات سيارة، فيما تمتلك العائلات التسع المتبقية سيارتين لكل منها. ولعلك قادر على الإدراك لحظيًا أن هناك تسع عشرة سيارة في المجموع، لكن اطلب من آلتك الحاسبة إيجاد ناتج 1 + 2 × 9. هل حصلت على 27 كجواب؟ وهذا خطأ واضح طبعًا. وفي حين أن الآلات الحاسبة العلمية تقوم بعمليات الضرب قبل الجمع كما ينبغي، تكتفي الآلات الحاسبة البسيطة بتنفيذ العمليات حسب ترتيب إدخالها، وبذلك ستقوم بحساب 1 + 2 أولًا، ثم ستضرب الناتج بـ 9. إذن فأنت تعرف، ربما دون أن تعي ذلك أن عليك أن تضرب 2 بـ 9 أولًا ثم تضيف 1.

العودة إلى نقطة البدء

إليك خدعة جديدة لتجربها باستخدام آلتك الحاسبة. أدخل عددًا من ثلاث خانات، ثم أدخل العدد نفسه مجددًا بترتيب الخانات نفسها، لتحصل على عدد مكون من ست خانات مثلًا، 237,237.

أدخل «÷11=». وستحصل على عدد مكون من خمس خانات. والآن، ودون أن تلغي النتيجة السابقة، أدخل «÷13=». سيكون لديك الآن عدد ما من ثلاث أو أربع خانات. أدخل «÷7=». وستجد أنك تحقِّق في العدد نفسه ذي الثلاث خانات الذي بدأت به!

كيف حصل ذلك؟ السر هو أن 7 × 11 × 13 = 1,001. وأنت تعرف أن ضرب عدد ما بـ 1,000 يكون بإضافة ثلاثة أصفار. ولذلك، فإن الضرب بـ 1,001 يؤدي إلى حصولك على العدد الأصليّ ذي الثلاث خانات مكررًا مرَّتيْن:

237,000 = 1000 × 237

237 = 1 × 237

237,237 = 237 + 237,000

إذن، من خلال القسمة التي كنت تنفذها على العدد الأصلي وكأنك كنت «تلغي» الضرب أعلاه، وتعرِّف القسمة والضرب بأنهما «عمليتان عاكستان،» لأنهما يلغيان بعضهما البعض.

ويسهل تحديد الخطأ كلما كانت العمليات الحسابية أبسط، لكن ما أسهل الوقوع في أخطاء من هذا النوع، سواء أكان باستخدام الآلة الحاسبة أم بدون استخدامها. أم بدونها، عند التعامل مع سلسلة من العمليات الحسابية كتلك التي تتضمن إضافة أو طرح نسب أو كسور (انظر صفحة 56). فمثلًا، فكر في الترتيب الذي يتوجب عليك اتباعه عند معالجة المسائل التالية:

- كيف تحصل على تكلفة جهاز كهربائي قبل الضريبة إذا كنت تعرف سعره بعد إضافة 15% كضريبة مبيعات؟
- يعرض عليك رئيسك أن ينزل راتبك 10% بشرط أن يمنحك زيادة 11% مباشرة بعد ذلك. هل تعتبره عرضًا مغريًا؟ (وفي الواقع، النتيجة هي خسارتك لـ 0.1% من راتبك عوضًا عن زيادة واحد بالمئة. وهل تعرف السبب؟ فكر كالآتي للتسهيل: «10% من ماذا؟» و«11% من ماذا؟»)

رياضيات سحرية: 6801

هناك عدد من الحيل السحرية التي تجعل صاحبها يبدو كقارئ أفكار، وتبدأ هذه بعبارة «فكَر في عدد ما» فكيف تعمل هذه الحيل كلها، وهل لك أن تتقنها أنت أيضًا؟ إليك الطريقة لتدهش أصدقاءك بمرونتك الحسابية.

الأحجية

جرّب الحيلة التالية:.

- دَوّن عددًا مكونًا من ثلاث خانات، شرط عدم تشابه أيّ خانة.
- والآن، اكتب هذا العدد مجددًا لكن معكوسًا هذه المرة (فمثلًا إذا كان العدد 259، دوّن 952).
- اطرح العدد الأصغر من العدد الأكبر. سيكون الجواب عددًا من ثلاث خانات لكن في حال حصولك على عدد من خانتين أضف ببساطة صفرًا في المقدمة (فمثلًا إذا حصلت على 37، اكتب «037»).
- اعكس الناتج مجددًا، وفي هذه المرة، اجمع الجوابين بدلًا من الطرح ستحصل الآن على عدد من أربع خانات.
- حان وقت الجزء السحري؛ اقلب الورقة رأسًا على عقب وانظر إلى العنوان: ستجد جوابك هناك وكأنه يحدق بك!

التفسير

لتحليل ماهية الحيلة السابقة فكر فيما فعلته في خانات المئات والعشرات والآحاد على طريقة الحساب المدرسي التقليدي. فلنفترض أنك اخترت العدد 348؛ وإن عكسته تحصل على 843، ثم كانت خطوتك التالية كالتالي:

آحاد عشرات مئات
8 4 3
- 3 4 8
4 9 5

ومهما كان العدد الذي اخترته، هناك حقيقتان ثابتتان: في خانة الآحاد، الرقم الذي في الأسفل دائمًا أكبر من ذلك الأعلى منه (فكّر فيها!)، بينما يكون الرقمان في خانتي العشرات متماثلين دائمًا (4 في المثال أعلاه)، وأيًا كانت الطريقة التي تعلمتها للطرح ستجد أن «الاستلاف» من خانة العشرات تمهيدًا لطرح خانات الآحاد يعني أن الناتج في خانة العشرات هو دائمًا 9، وهناك شيء آخر بالغ الأهمية، وهو أن خانتي الآحاد والمئات في جوابك مجموعهما دائمًا 9 أيضًا. وستتضح أهمية ذلك عند الانتقال إلى الخطوة التالية:

آحاد عشرات مئات
4 9 5
+ 5 9 4

إن مجموع الرقمين في خانتي الآحاد هو دائمًا 9، وكذلك هو الحال بالنسبة لخانتي المئات (لأنهما متماثلان إن عكستهما). أما خانتا العشرات فستحتويان دائمًا على الرقم 9 ما مجموعه 18:

9 18 9

وبالطبع، تنتقل الـ 1 من الـ 18 («باليد واحد») لتضاف إلى خانة المئات ما يعطي الناتج النهائي:

10 8 9

مرجعيات تحويلية

عند تحويل العملات أو القياسات ستجد أن بعض «المرجعيات» أو المقادير التي يسهل تذكّرها تمكنك من تبسيط الحساب ذهنيًا بشكل كبير. مثلًا، إن لزمك أن تقدّر فيما إذا كان سعر التذاكر الذي توشك على شرائه خلال إجازتك مناسبًا أم لا، أو إن أردت أن تستشعر مدى طول مسافة ما بالكيلومترات مقابل ما تعرفه بالأميال أو العكس.

هل يلزمني أن أعرف كم بالضبط؟

أحيانًا يهمنا أن يكون التحويل دقيقًا: فلن يعجبك - مثلًا - أن يستخدم البنك تقديرًا تقريبيًا لسعر صرف العملة التي ستستعملها في إجازتك، كما لن ترضى أن يخمِّن الصيدلاني الجرعة المناسبة لوصفة الدواء.

لكن كثيرًا ما يفيدك أن يكون في متناولك قيم عملية يسهل تذكّرها وما يقابلها؛ لتتمكن من الوصول إلى رقم أوّلي بسرعة.

وهناك المزيد عن أهمية التخمين في الفصل الرابع (انظر صفحة 97)، لكن إليك بعض الأفكار المفيدة فيما يخص «القيم المرجعية» التي يمكنك اللجوء إليها عند الحاجة للقيام بتحويلات سريعة في ذهنك. وقم باستحداث ما يناسب أيّ موقف تواجهه أو تعديله سواء كان تحويل مقادير وصفة ما أو تقدير مدى بعد المسافات التي يتوجّب عليك قطعها أو تخيّل مساحات منازل للبيع في الخارج.

حَرّ أم بَرْد؟

تتساوى درجات الحرارة في مقياسي سيلسيوس وفهرنهايت عندما تصل القراءة إلى 40°. وتهم هذه المعلومة الأكاديميين، كما قد تكون ذات فائدة في اختبار معلومات عامة على سبيل المثال. لكن ما رأيك بدليل أكثر عملية للتعرف على الطقس؟ لعلك تعرف مسبقًا أن 0° مئوية = 32° فهرنهايت، وإليك الآن «مرجعَيْن تحويليَّيْن معكوسَيْن:»

16° سيلسيوس = 61° فهرنهايت

28° سيلسيوس = 82° فهرنهايت

احفظها غيبًا، وستجد أنه من السهل تقدير درجات أخرى بمقارنتها بها دون الحاجة للجوء إلى تحويلات صعبة.

نقود، نقود، نقود

بدلًا من أن تحاول تذكُّر أسعار الصرف بدقة زَوِّد نفسك ببعض التحويلات المرجعية الملائمة. إذا كانت 1 زْوُوتي تساوي 23 يورو سنتيمًا فإن هنالك 4 زْوُوتي تقريبًا في اليورو الواحد، في حين أن 50 يورو هي أكثر بقليل من 200 زْوُوتي. أبْقِ ذلك في اعتبارك وسيصبح من الأسهل عليك أن تقدر فيما إذا كان كوب قهوة مقابل 6 زْوُوتي في وارسو يعتبر سرقة أم لا، أو إن كنت قادرًا على دفع ثمن 600 زْوُوتي مقابل ذلك الفستان.

مصادفة غريبة

أحد أبسط المرجعيات التحويلية بين الميل والكيلومتر هي أن خمسة أميال = ثمانية كيلومترات. لكن ابتداءً من الخمسة أميال، تتساوى تحويلات الميل للكيلومتر مع متتالية فيبوناتشي (انظر الصفحة التالية) بدقة مفاجئة. فإن 21 ميلًا تساوي 34 كم تقريبًا، و34 ميلًا هي تقريبًا 55 كم، إلخ. والآن، اصنع لنفسك شريطين من أعداد فيبوناتشي كما هو مبين أدناه، ثم ضعها فوق بعض لتحصل فورًا على جدول تحويل كيلومتر/ميل.

كم	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	897
ميل	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

فيبوناتشي

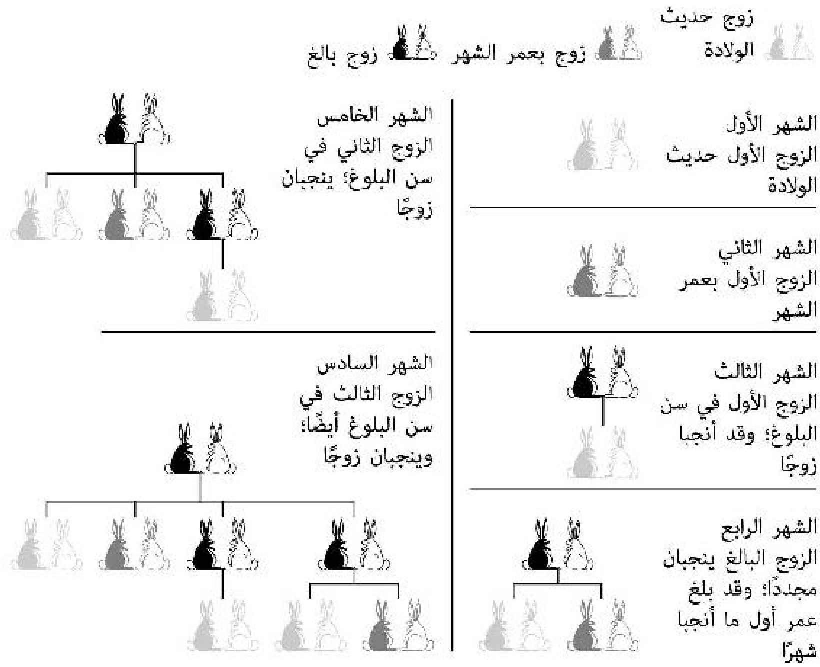
كان ليوناردو بيزانو، أو ليوناردو البيزي (نسبة لمدينته بيزا) (1170م-1250م)، المعروف بفيبوناتشي رياضيًا ذا موهبة فذة، ويمكن العثور على المتتالية الحسابية التي اكتشفها في عام 1202 في العديد من الأماكن المتنوعة ومنها ما هو غير متوقع للغاية.

ليوناردو والأرانب

اكتشف فيبوناتشي المتتالية التي تحمل اسمه أثناء دراسته لسرعة تكاثر الأرانب، ويستخدم هذا المثال إلى يومنا هذا لتعريف الناس بالمتتالية.

إذا تكاثر زوج أرانب مرة كل شهر ابتداءً من عمر الشهر وأنجبا في كل مرة زوجًا واحدًا (ذكرًا وأنثى) بعد شهر واحد، كم زوجًا من الأرانب يكون هناك بعد عام واحد على افتراض عدم نفوق أيّ منهم؟ اكتشف فيبوناتشي أنه بعد شهر من التجربة سيكون هنالك زوج واحد فقط، وبعد شهرين زوجان اثنان (زوج بالغ وزوج حديث الولادة)؛ وبعد ثلاثة أشهر ثلاثة أزواج(زوج بالغ، زوج بعمر الشهر، وزوج حديث الولادة)، لكن ابتداءً من الشهر الرابع تتصاعد وتيرة الإنجاب لنحصل على 5 أزواج ثم 8، 13، 21، إلخ. والملفت للنظر في هذه المتتالية هو أن أيّ حدٍّ فيها يساوي مجموع الحدين السابقين:

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144



المتتالية في الطبيعة

وبالطبع فإن النمط السابق لتزاوج الأرانب ليس واقعيًا، ومع ذلك يكثر وجود متتالية فيبوناتشي في الطبيعة. وأحد أكثر هذه الأمثلة احتفاء هو رأس زهرة عباد الشمس أو رؤيسها. إذ تنمو بذورها بشكل لولبي يمثل متتالية فيبوناتشي: فمثلًا، تتموضع البذرة 21، بالعدّ مع عقارب الساعة بجانب البذرة 34 من الدوامة الحلزونية التالية الآخذة الشكل العكسي (أي عكس عقارب الساعة). وتحتوي الحافة الخارجية عادة على 88 بذرة باتجاه و55 بذرة بالاتجاه المعاكس، وتحتوي أكواز الصنوبر أيضًا على دوّامات لولبية تمثل متتالية فيبوناتشي وكذلك هو الحال في العديد من أنواع الأصداف البحرية. في حين أن العديد من الأزهار، بما فيها بعض أزهار الحوْذان buttercups، وبعض الورود البرّيّة wild roses أو الإبريّة، وزهرة Glebionis segetum أو corn marigold، وزهرة الهندباء، وبعض أزهار النجم Aster amellus أو Michaelmas daisies، يتماثل عدد بتلاتها مع أحد أعداد فيبوناتشي: 5، 8، 13، 21، 34، 55، أو 89 بتلة.

وتعتبر هذه المتسلسلة مثالًا على العلاقات المدهشة التي تجمع الأرقام ببعضها. وكما رأينا في صفحة 47، فهي أيضًا تكافِئ العلاقة بين الأميال والكيلومترات. وتربط بين وحدتي القياس هاتين النسبة الذهبية، التي سنستعرضها في الفصل التالي.

3
العلاقات بين الأرقام

يمكن لأناس من جنسيات مختلفة أن يقولوا الشيء نفسه كل بلغته الأم وسيبدو للسامع أن ما قالوه مختلف تمامًا. ومع أن الرياضيات توصف بأنها لغة عالمية فيمكن لمستخدمها أيضًا أن يعبِّرعن الشيء نفسه بعدة طرق مختلفة. ولعلك تعرف أن خمسين بالمئة و0.5 مجرد طريقتين مختلفتين لنقول «نصف» ومع هذا فسيمكنك هذا الفصل من فهم الأعداد الكسرية فهمًا أفضل؛ كما ستتعلم - مثلًا - كيف أنه يمكن لـ 2 أن تكون أيضًا 10، أو حتى أ، أو س.

وستجد أنه من خلال التعرف على الطرق المختلفة للتعبيرعن الكميات، وعلى العلاقات التي تجمع الأرقام ببعضها ستكون قد قطعت شوطًا كبيرًا على طريق التعامل مع الأرقام في الحياة اليومية بارتياح.

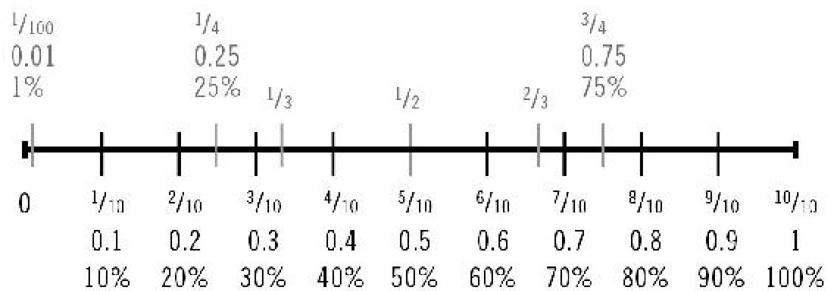
جزء من كلّ

كثيرًا ما يخلط الناس دون داع بين الكسور والأعداد العشرية، والنسب المئوية. وهي ليست مفاهيم منفصلة تمامًا، إذ إنها ببساطة طرق مختلفة للتعبير عن الشيء ذاته: جزء من كل. ومع أن بعض العمليات الحسابية تصبح أسهل عند استخدام النسب المئوية أو الفاصلة العشرية، فإنه من المهم تذكّر أنها في نهاية الأمر مجرد كسور بهيئة مختلفة.

كسْرٌ بأيّ اسمٍ كان

توضِّح لنا الكسور فورًا كم جزءًا متساويًا ينقسم إليها شيء ما: 1/16 هو جزء واحد من ستة عشر آخرين متساوية؛ و3/4 هي ثلاثة أجزاء من ربعة متساوية أيضًا؛ إلخ. ولأن نظام العدّ الذي نستخدمه مبني على الرقم عشرة (انظر صفحة 75)، فإننا نستعمل العُشر والواحد بالمئة بكثرة. ومن الأسهل عادة تمثيل هذين الكسرين باستخدام الفاصلة العشرية أو كنسب مئوية: 1/10 هي 0.1 أو 10%، كما أن 1/100 تساوي 0.01 أو 1%.

وباستخدام خطّ مقسم إلى مسافات متساوية (ويمثل هذا الكل أو وحدة واحدة (1))، يمكن توضيح الطرق المتعددة للتعبير عن الكسر نفسه.



تكرار عشري

من المرجح أنك لاحظت كيف أن 1/3 و2/3 على السطر في الصفحة المقابلة لم يمثّلا باستخدام الفاصلة العشرية ولا كنسب مئوية. فإن تحويل 1/2 إلى عدد عشري باستخدام آلتك الحاسبة يبدو بسيطًا ومرتبًا: 1 ÷ 2 = 0.5. لكن، جرّب أن تقسم 1 على 3 على ماذا تحصل؟

يقتصر استخدام الفاصلة العشرية بشكل عملي ودقيق على تمثيل الكسور التي تستخدم فقط ثلاث خانات بعد الفاصلة أو أقل، كالأعشار أو الأجزاء من مئة أو من ألف. فقد أظهرت لك آلتك الحاسبة 1/3 على أنه 0.33333 وهذا الجواب، وعلى الرغم من طوله، فإنه ليس صحيحًا أيضًا - إذ إن الـ 3 مكررة إلى الما لا نهاية. ومن المعتاد تمثيل الأعداد ذات التكرار العشري بوضع شرطة فوق الجزء المكرر: 0.3 مثلًا. والآن، ودون اللجوء إلى آلتك الحاسبة أيمكنك إيجاد طريقة تمثيل 1/9 كعدد عشري؟

ولا تقتصر التكرارات العشرية على تكرار رقم واحد فقط بعد الفاصلة لا نهائيًا؛ فبعضها يشكل أنماطًا رقمية ملفتة للانتباه. جرّب 1/11 و1/13، بالإضافة إلى 1/7، و2/7، و3/7، إلخ.

لِمَ لا نستخدم الصيغة نفسها دائمًا؟

نستخدم الكسور كثيرًا في حديثنا وتفكيرنا ربما لسهولة تصورها، فيمكننا تخيّل نصف تفاحة بكل يسر، أو كعكة مقسمة لثماني قطع متكافئة. أما النسب المئوية فهي طريقة أنسب لتوضيح كيف يُقسّم شيء ما إلى أجزاء غير متكافئة. ولتتصوَّر توزيع أرباح متجر ما على أقسامه المختلفة على هيئة حصص أو كسور: الملابس الثمينة: 1/4؛ ألعاب الأطفال: 3/20؛ المعدات الرياضية: 2/5؛ ملابس الرجال: 1/5. ولا يتّضح بشكل مباشر حسب هذا التمثيل أيّ من هذه الأقسام يحقّق الربح

الأوفر. أما إذا حَوَّلتَ هذه الكسور إلى نسب مئوية (25%، 15%، 40%، 20%)، فسيصبح الأمر جليًّا.

يُعدّ جمع الأعداد العشرية وطرحها أسهل من الكسور في العادة. فما الأسهل برأيك، 1.125 + 3.4، أم $^{11}/_{8}$ + $^{32}/_{5}$؟ وهذا أحد الأسباب وراء اتِّباع أغلب العملات التقسيم العشري. كما ويسهل من خلال النسب المئوية، والأعداد العشرية تصوُّر مقدار كسر ما. فمثلًا، حاول أن تتخيّل مقدار $^{14}/_{25}$ من كمية ما. إذ من الأبسط بمراحل تمثيل ذلك كـ 56% ($^{56}/_{100}$) من القيمة أو أكثر من النصف بقليل.

النسب المئوية كمقدار تغيُّر

يساعد استخدام النسب المئوية على تحديد مدى الزيادة أو النقصان في القيم، كزيادات الرواتب أو هوامش الربح للسلع، بحيث يتضح الاختلاف من خلال تغيُّر النسبة.

إذا ازداد طول طفل من 80 سم إلى 100 سم خلال سنة، فإن الفرق هو 20 سم، ولتحديد الزيادة في النسبة الذي يمثلها هذا النمو، ما عليك إلا أن تَقسِم مقدار التغيُّر على الطول الأصلي ثم تضرب الناتج بمئة. إذن، نستطيع أن نرى من خلال 20 ÷ 80 × 100 = 25 أن الطفل ازداد طوله بنسبة 25%.

ويفتح الحديث عن تغيُّر النسب بدلًا من الأرقام الدقيقة، مجالات واسعة، كما يدرك كل من الصحفيين والساسة بكل وضوح. ولنفترض أن عملية قلب واحدة فقط من أصل ألف أُجريت العام الماضي قد انتهت بموت المريض على طاولة العمليات. أما العام الذي يليه وبالمعدل نفسه من العمليات، فقد شهد موت اثنين من المرضى فقط. ومع أنه لا يمكن اعتبار هذه الأرقام تحت أيّة مقاييس مؤشرًا سيئًا على أداء الجرّاحين، فلتتصور هذا العنوان:

ارتفاع عدد وفيات عمليات القلب بنسبة 100%!

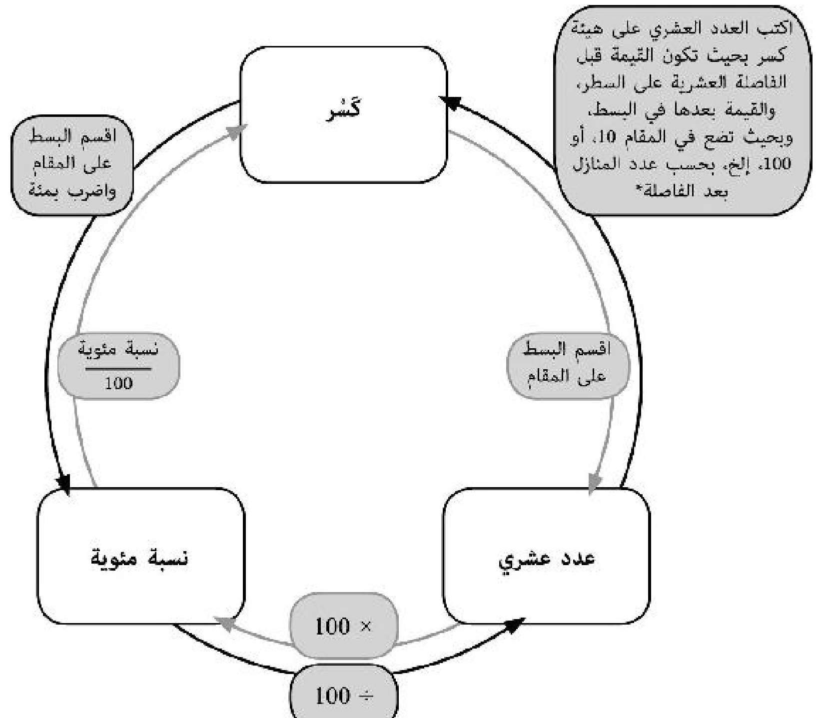
ومع أن الخبر صحيح فهو لا يساعد بتاتًا على فهم الأرقام التي بُني عليها. ومن الصعب حصر الأمثلة الإعلامية على استخدام النسب للتضليل. فعليك أن تتنبه للحالات التي استخدم فيها تغيُّر النسب بشكل مفتعل وتتمعَّن في الأرقام عوضًا عنها، لتحصل على صورة أوضح عما كان يحدث بالفعل.

بيّن الفرق

وهنا مثال على أحد استخدامات تغيُّر النسب بشكل يفيد في مقارنة القيم. لنفترض أنك وأنت في طريقك لشراء سيارة جديدة قد مررت بمحل ما، ودخلته لشراء الشوكولاتة المفضلة لديك. وقد شعرت بالقرف عند اكتشاف أن سعرها ارتفع من 40 سنتًا إلى دولار كامل! فتقرر ساخطًا أن تؤخر رحلتك عشر دقائق لتذهب إلى متجر آخر، وتبتاع الشوكولاتة بالسعر المعتاد. وبعد قطعك لمسافة بسيطة، تمرّ بلوحة إعلانية ضخمة تروِّج للسيارة نفسها التي تودّ شراءها مقابل 12 ألف دولار، لكنها تشير أيضًا إلى أن سعرها يبلغ 11,999.40 دولارًا على بعد نصف ميل.

تحويلات بسيطة

إليك وسيلة بسيطة تذكرك بطرق تحويل الأعداد من صيغة إلى أخرى. ومع أن هذه الطرق ليست الأسرع بالضرورة، لكنها صالحة دائمًا فلن تواجه إشكال الحالات الاستثنائية.



* فمثلًا، 6.2 تصبح 6 و$^{2}/_{10}$، و6.25 تصبح 6 و$^{25}/_{100}$. ثم يمكن تبسيط الكسور- فتصبح الحالتان السابقتان 6 و$^{1}/_{5}$ و6 و$^{1}/_{4}$.

النقاط المئوية

من الأخطاء الشائعة الخلط بين النقاط المئوية والنسب المئوية الفعلية. فإذا رصد خبر في جريدة معنية بعالم المال - مثلًا - ارتفاع معدل السحوبات على المكشوف ثلاث نقط مئوية، فإن هذا يعني زيادة النسبة بمقدار 3 نقاط: ربما من 6% إلى 9%، أو من 22% إلى 25%. ويختلف هذا كثيرًا عن قول إن هناك زيادة بنسبة 3%.

ولن يخطر في بالك أن تقصد المعرض الأبعد لتشتري السيارة من هناك، من كان ليفعل ذلك لمجرد أن يوفر 60 سنتًا؟

إن ما يجعل الموقفين يبدوان مختلفين تمامًا هو نسبة التغيُّر: ففي حالة الشوكولاتة، فإن التغيُّر يمثل ارتفاعًا هائلًا بمقدار 150%، أما السيارة الأرخص، فقد نالها خصم يعادل 0.005% - أي خمسة أجزاء من ألف من 1% فقط.

حساب النسب المئوية ذهنيًا

لتتمكن من إيجاد النسب المئوية في رأسك، قسّمها إلى أجزاء يسهل تذكُّرها. وسيساعدك استخدام الأنماط العددية، ومهارات التنصيف والمضاعفة التي تعلمتها سابقًا (انظر الصفحات من 34 إلى 36 إذا احتجت أن تستعيد ما تعلمت).

أحجار أساس

إن أبسط نسبة مئوية هي 10%. فلتحصل على عشرة بالمئة من عدد ما، ما عليك سوى قسمته على 10، وذلك بتحريك جميع خاناته منزلة واحدة إلى اليمين (أو لتوضيح هذا بطريقة أخرى، بتحريك الفاصلة العشرية منزلة واحدة إلى اليسار).

- إيجاد عشرة بالمئة من 26: 26 ÷ 10 = 2.6
- 10% من 13.7: 1.37
- 10% من 12,340 = 1,234

(أو بالتحديد 1,234.0، لكن يمكننا أن نحذف الصفر)
ولإيجاد 1%، ما عليك سوى تكرار خدعة الـ 10% مرّتَيْن:

- 1% من 26 = 0.26
- 1% من 6,153 = 61.53
- 1% من 13.7 = 0.137

ويساعد كلٌّ من التنصيف والمضاعفة على إيجاد عدد من النسب المئوية الأخرى بسهولة. فـ 50% تساوي النصف طبعًا، وبإمكانك أن تحسب 5% ببساطة إما عن طريق حساب الـ 10% ثم التنصيف أو بإيجاد 10% من 50%، كما توضح الأمثلة الآتية:

- 5% من 26: 10% = 2.6؛ ونصفها هو 1.3
- 50% = 13 و10% من 13 = 1.3

وبالموافقة بين هذه اللبنات الأساسية، يمكنك إيجاد أيّ نسبة مئوية بكل سهولة. فمثلًا، ما هي 60% من 3,000 كم؟

- هنا طريقة موفّقة: 50% + 10%: 1500 + 300 = 1,800 كم. انتهينا!
- وهذه طريقة بديلة: نحسب 10% (300 كم) ثم نضرب بستة.

ويلزم بعض النسب المئوية كـ 19% شيء من الخيال، وهذا لا يعني أنها صعبة. فما رأيك بالطريقة التالية:

- 20% (هي 10% مضاعفة)، ونطرح منها 1%؟

واليك بعض الأخبار الطيبة. ففي المدرسة كان يُطلب منا باستمرار أن نحسب بطريقة واحدة فقط، لكن ومع ازدياد ثقتك بنفسك ستدرك أن هناك طرقًا عديدة للوصول إلى الحل، ولك أن تختار الطريقة التي تجدها أكثر منطقية بالنسبة لك. ويُعَدّ حساب النسب المئوية في ذهنك مثالًا جيدًا على هذه المرونة. فلمعرفة 16% من قيمة ما، لعلك ستختار إيجاد 1% أولًا ثم تضاعفها أربع مرات على التوالي. وربما أُفَضّل حساب 10% ثم أضيف إليها النصف (أي 5%) وأخيرًا أضيف 1%. ومن الممكن لشخص ثالث أن يختار إيجاد 10% ثم يضاعفها وينتهي بطرح 1% منها أربع مرات. وسنكون جميعنا على صواب!

كيف تحسب:

- 75% من عدد ما؟
- 48%؟
- 17.5%؟

تمرّن على الحساب كلما سنحت لك الفرصة فمثلًا هنالك خصومات بمقدار 25% أو 33%، أو أن هنالك رسوم خدمة 15%.

النِّسَب والتناسب

هنالك طريقة أخرى للتعبير عن الأجزاء من الكل، ألا وهي النِّسَب والتناسب، لكنها تُعنى بالعلاقة النسبية بين القيم عوضًا عن القيم بحدّ ذاتها، وتعتمد تطبيقات مثل: تحضير خلطة الدهان، وتحضيرالمشروبات، وتصميم المباني ذات الجمال الأخّاذ، على استخدام النسب الصحيحة بين الكميات للوصول إلى التوازن المرغوب.

من يستخدم النِّسب؟

تُكتب النسبة على هيئة أ:ب، وتصف العلاقة النسبية بين قيمة ما وأخرى. وقد تتذكر تعلُّمك للنِّسب في المدرسة- فلطالما كانت الأسئلة من نوع كم عدد علب الطلاء ذي اللونين الأزرق والأصفر التي تحتاجها للوصول إلى درجة معينة من اللون الأخضر شائعة في امتحانات الرياضيات- لكن للنِّسب استخدامات واسعة على أرض الواقع أيضًا. إذ إنه على كل من الطهاة وأخصائيي التخدير والبنّائين ومصففي الشعر على سبيل المثال لا الحصر، التمكن من تقدير النسب بشكل جيد إذا ما أرادوا تحديد المقادير الصحيحة لأمزجة مثل: صلصة الهولنديز أو المخدِّر أو صبّة الخرسانة أو صبغة الشعر.

تمعّن في الأشياء الموجودة حولك في المنزل وستجد أن النسب مستخدمة في التعليمات أو المعلومات حول خلطات المقادير: «قم بتخفيف مقدار واحد من العصير المركز في أربعة مقادير من الماء»؛ «أضف كوبين من الماء لكل كوب من الأرز»؛ «نسبة قيم النيتروجين (N) والفوسفور (P) والپوتاسيوم (K) في هذه العبوة من السماد (أو N-P-K) هي 8:2:6.» issues تتفاوت شاشات التلفاز تفاوتًا هائلًا من حيث الحجم، لكن تنوّع النسب بين طولها وعرضها محصور جدًا. وتتوزع مساحة الشاشة العريضة ذات الأبعاد بنسبة 16: 9 على 16 وحدة عرض مقابل كل 9 وحدات ارتفاع، وبغضّ النظر عن حجمها. وعند معالجة الصور الرقمية على جهاز كمبيوتر، سيكون لديك على الأرجح خيار للحفاظ على نسبة أبعاد الصورة، بحيث إذا قمت بتكبير العرض أو تصغيره سيُضبط الارتفاع تلقائيًا «بشكل متناسب».

التعامل بالنسب

لقد عانى الكثير منا من الصلصات شديدة الميوعة، أو صبّات الإسمنت التي ترفض أن تجفّ وتثبت، إلخ. ويرجع ذلك لكون النسبة بين مقاديرها خاطئة. مثلًا، تعرف مصففة الشعر أنه يتعين عليها خلط ماء الأكسجين أو پيروكسيد الهيدروجين مع ملوّن أحمر بنسبة 4:1 لتحصل على صبغة شعر حمراء. فإذا استخدمت 40 مل من الپيروكسيد، ستحتاج إلى إضافة 10 مل من الملوّن. لكنها أخطأت وسكبت 20 ملّيلترًا من الملوّن في وعاء الخلط ثم بعد تفكير سريع قررت أن تعيد التوازن بإضافة 10 مل إضافية من الپيروكسيد مقابل الـ 10 مل الفائضة عن الحاجة من الملّون، ما سيُضطرها ربما لمواجهة صراخ إحدى أكثر فتيات المدينة احمرارًا للشعر. طبعًا كان عليها أن تضيف 40 ملّيلترًا أخرى من الپيروكسيد. فللحفاظ على النسب ثابتة، يجب **ضرب** جميع القيم **بـ أو قسمتها** على المقدار نفسه: أي ما لم تكن النسبة 1:1، فإن إضافة أو طرح كمية محددة سيغير النسبة بين القيمتين، كما حدث عند إضافة 50 مل فقط من ماء الأكسجين إلى وعاء الخلط، الأمرالذي جعل نسبة الخليط 50:20. وبتبسيط الحدّين إلى أدنى درجة، نحصل على 5:2، أو 2.5:1.

الحصص

ويرتبط هذا المفهوم بالنسب، لكنه يختلف عنها قليلًا. إذ توضح النسب العلاقة بين مقدار ما ومقدار آخر؛ بينما تعبّر الحصص عن مقدار مكون ما بالنسبة إلى الكل. وبينما كانت النسبة الصحيحة لمزيج صبغة الشعر التي لم تفلح المصففة في تحضيرها هي
4:1، يمكن أيضًا التعبير عن الوصفة بأنها جزء واحد من المُلوِّن مقابل أربعة أجزاء من الپيروكسيد. إذًا لدينا خمسة أجزاء بالمجموع، وبذلك فإن *حصة* المُلوِّن هي الخمس (من الخليط كله).

استخدام النسب لاستيعاب الأعداد الكبيرة

قد يساعد التفكير بالنسب على التركيز على ما يهمنا بالفعل عند التعامل مع الأرقام الكبيرة. فإذا قُدّر عدد سكان بلد وهمي بـ 60 مليونًا، وكان إنفاقه على برنامج صحي حكومي 75 مليارًا، يمكننا استخدام النسبة بين هاتين القيمتين لتكوين فكرة عما يُنْفَق على الفرد الواحد:

60 مليونًا: 75 مليارًا

وبتبسيط حدَّي النسبة تدريجيًا نحصل على:

60: 75,000 = 6: 7,500 = 1: 1,250.

إذًا فإن معدل ما يصرف على المواطن الواحد يساوي 1,250.

الحساب باستخدام النسب (الحلول صفحة 151)

والآن، أَعْمِل عقلك واستخدم النسب لحل المسائل الآتية:

- تُعَشّش الخفافيش في جرس كنيسة القسّ تشالكي وقد لاحظ أن هنالك 30 خفّاشًا بُنّيًا لكل 20 خفّاش أسود. فإذا كان هناك 200 خفّاش في المجموع، كم منها بنيّ اللون؟
- يتقاسم كلٍ من ويليام وتوماس وربيكا كيسًا من الحلوى يحتوي على 90 قطعة، وذلك بناءً على النسبة بين أعمارهم. عمر وليام خمس سنوات، أما توماس، فهو في السادسة من عمره،

وريبيكا في السابعة. فكم عدد قطع الحلوى التي سيتلقاها كل منهم؟ (دليل: حاول آن تَبَسّط النسب و/أو أوجد مقدار الحصة الواحدة

- الدم مزيج من البلازما والأنواع المختلفة من الخلايا. وتشكل هذه الخلايا لدى الإنسان السليم 45% من الدم. فكيف يمكن التعبير عن حصة البلازما؟ وما نسبة البلازما للخلايا، مُبسّطة إلى أدنى درجة؟

قبل أن تتابع القراءة، قِسْ بُعدَي بطاقة ائتمان، طولًا وعرضًا، بما أمكنك من الدقة. ثم استخدم آلة حاسبة لقسمة القياس الأكبر على الأصغر. وستحصل في الأرجح على 1.6 تقريبًا، ما يعني أن النسبة بين البعدين هي 1.6:1. وهذه ليست مصادفة- انظر الصفحة 66 لتعرف لماذا.

علاقة من نوع خاص: ط

يعتبر العدد پاي، أو ط، أو النسبة التقريبية (ويكتب عادة باستخدام الحرف الإغريقي π)، أحد الأساطير العددية التي أدهشت الرياضيين لقرون عدة. ولعله أشهر مثال على عدد غير نسبي، والمقصود بذلك عدم إمكانية كتابته على هيئة عدد عشري مكتمل.

ورغم كونه عددًا «غير منطقي» - أي أنه يستحيل تمثيله بكسر عشري منتهٍ- يمثل الثابت الرياضي پاي علاقة دقيقة للغاية: هي العلاقة بين قطر دائرة ومحيطها. إذ اكتشف قدماء الإغريقيين أن قسمة طول الإطار الخارجي لدائرة ما أو(محيطها) على طول أيّ خط مستقيم يقسمها إلى نصفَيْن

متساويَيْن (ويعرف هذا بقطر الدائرة) تؤدي دائمًا إلى الجواب نفسه: وهو ما يزيد بقليل عن 3.14. وهناك طريقة ممتعة لإثبات ما سبق، وذلك بأن تطلب من مجموعة من الأشخاص تشكيل دائرة بشبك الأيدي ثم تخبرهم بأنك بحاجة إلى ثلث عددهم بالضبط؛ لكي يشكّلوا خطًا مستقيمًا يقطع الدائرة من الداخل. وستكون على صواب في تقديرك في كل مرة!

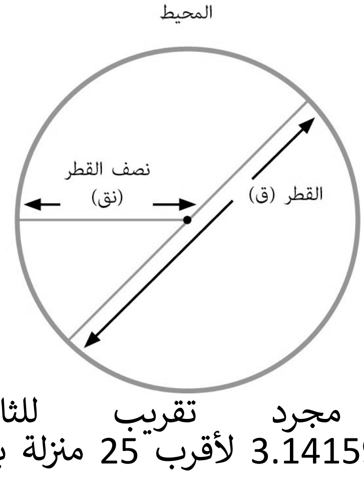
بعض من المساعدة من آينشتاين

إذا رغبت بإبهار زملائك بحفظك أول خمس عشرة منزلة من العدد π، إليك هذا الاقتباس من آينشتاين ليعينك على تذكرها:

«كم أحتاج إلى مشروب قويّ، بالطبع، بعد الفصول الثقيلة حول ميكانيكا الكم.»

وكيف يساعد هذا الاقتباس؟ حاول أن تعدّ الحروف في كل كلمة.

كما توصَّل اليونانيون إلى إمكانية إيجاد مساحة أيّ دائرة بتربيع نصف قطرها وضرب الناتج بالعدد π. (وربما تذكر المعادلتين من أيام المدرسة: المساحة= πنق2، بالإضافة إلى المحيط= πق (أو 2πنق).)



والقيمة 3.14 هي مجرد تقريب للثابت π. فهو يساوي 3.1415926535897932384626433 لأقرب 25 منزلة بعد الفاصلة وهو لا يساوي حتى

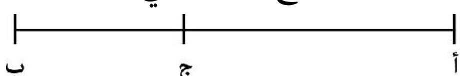
هذه القيمة بالضبط. فمثلًا، تمكنت الحواسيب من إيجاد قيمة π باستخدام ما يزيد عن تريليون منزلة بعد الفاصلة العشرية، ومع ذلك لم تتمكن من الوصول إلى القيمة الدقيقة.

النسبة الذهبية

تُعْرَف النسبة الذهبية أيضًا، التي كانت تُمَثّل سابقًا بالحرف الإغريقي Φ (فاي) بالقَطْع الذهبي، أو حتى بالنسبة الإلهية، وذلك لما تتصف به من جمال. وقد اكتشفها الرياضي الإغريقي إقليدس، لكن الكثير مما يُشاع الاعتقاد بصوابه عنها ركيك على أفضل تقدير، وفي أسوأ حال، خاطئ تمامًا!

ما النسبة الذهبية؟

وكما رأينا في الصفحة 59، النسبة هي العلاقة بين قيمتين، أو المقارنة بينهما. ولنأخذ خطًّا أب، وعليه النقطة ج تبتعد قليلًا عن منتصفه، بحيث تكون النسبة بين المسافتين أج: ج ب مساوية للنسبة أب: أج. وهذه هي النسبة الذهبية.



ويمكن حساب النسبة الذهبية بالضبط بتنصيف ما يزيد بواحد على الجذر التربيعي للعدد خمسة، أو بكتابة ذلك رياضيًا، $(1 + \sqrt{5}) \div 2$. والناتج هو عدد غير نسبي- ما يعني عدم إمكانية تمثيله تمامًا كَكَسْرٍ عشريّ، كما أنه لا يحتوي على تكرار عشريّ أيضًا (انظر الصفحة 56). وتمنح هذه الخاصية النسبة الذهبية أهميتها في الطبيعة (انظر الصفحة 70)، وكذلك في الفن. لكن، قبل أن نطّلع على أمثلة عليها، من المفيد أن ندحض بعض الأساطير التي نشأت وشاعت عنها.

«يبدو الجميل من الشيء على صواب بسبب قوة جماله”

إليزابيث باريت براوننغ (1806-1861)

مغالطتان شائعتان

يعتقد الكثيرون أن النسبة الذهبية هي 1.618 بالضبط، بمن فيهم الكاتب دان براون، الذي استخدم هذه القيمة في كتابه «شيفرة دافينشي.» ومع أنها تقريب مناسب للنسبة الذهبية، فهي ما تزال غير دقيقة تمامًا، وذلك لكون الأخيرة عددًا غير نسبي.

وكذلك من السائد الاعتقاد بهوس الحضارات القديمة، كالإغريق والرومان وقدماء المصريين، بالنسبة الذهبية مما جعلهم يبالغون في استخدامها في بُنْيانهم، وهو الأمر الذي قلّدهم فيه العديد من فنّاني عصر النهضة. إلا أن هذا زعم مضلل بعض الشيء. فلا شك أن النسبة الذهبية تسعد الناظر لتناسب أبعادها، وبذلك لا يُستغرب احتواء العديد من المباني واللوحات الفنية ذات البعد الجمالي الخاص على نسب قريبة منها مثلًا (طول وعرض وجه الموناليزا يتناسبان تمامًا مع النسبة الذهبية).

ومع ذلك، فإن معظم هذه الحالات قد طُبّقت فيها النظرية بأثر رجعي إذ اختار الفنانون والمعماريون نِسَبًا جميلة المنظر، وكانت المصادفة أنها تقارب النسبة الذهبية أحيانًا. ومن الجدير بالذكر أن «النسبة الذهبية» كعبارة لم تستخدم قبل العام 1835!

النسبة الذهبية ومتتالية فيبوناتشي

تقترب النسبة بين حدَّين متتابعين من متتالية فيبوناتشي العددية (انظر الصفحة 73)، التي تُحسب بقسمة الحدّ الأكبر على الأصغر، بتسارع ملحوظ من النسبة الذهبية:

$$1 \div 1 = 1$$
$$2 \div 1 = 2$$
$$3 \div 2 = 1.5$$
$$5 \div 3 = 1.6666$$
$$8 \div 5 = 1.6$$
$$13 \div 8 = 1.625$$
$$21 \div 13 = 1.615$$

34 ÷ 21 = 1.619

55 ÷ 34 = 1.618 (كما أن 34 ÷ 55 = 0.618)

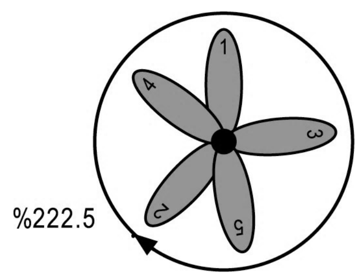
(ولعلكٍ لاحظت أن هذا يُفسِّر أيضًا جدول التحويل بين الكيلومترات والأميال في الصفحة 52: إذ إن ميلًا واحدًا يساوي 1.6 كيلومتر تقريبًا، وبذلك فإن النسبة بينهما تقارب النسبة الذهبية، وتشكل ظلًا شبيهًا للغاية بمتتالية فيبوناتشي).

ويستفيد الفن الإسلامي الهندسي بشكل كبير من أعداد فيبوناتشي لتوليد أنماط بديعة. إذ كان الفنانون يقدِّسون على وجه التحديد النسب بين القيم المتتالية، بما أن 1 ÷ 0.618 = 1 + 0.618، و الرقم واحد يمثِّل الأحادية (أو الكون). ??

النسبة الذهبية في الطبيعة

يُفسِّر التناسبُ الجذاب بين أبعاد النسبة الذهبية الاستمرارَ في استخدامها في الفن والتصميم، لكن ما يعتبر مذهلًا بالفعل وجودها في الطبيعة بكثرة، وكذلك بالنسبة لمتتالية فيبوناتشي المتصلة بها. ويُعتبر نمط نمو أوراق النباتات والزوايا التي تتخذها مثالًا ممتازًا على ذلك.

تحت ظروف مثالية - كلما نمت نبتة ما. اتخذت أوراقها الجديدة زاوية مختلفة قليلًا عن تلك التي هي أدنى منها، والمغزى من ذلك عدم حجب الضوء عن الجزء الأقدم من النبتة. لكن، ما أفضل زاوية بين الأوراق؟ فإذا التفّت الأوراق بزاوية 90 درجة، مثلاً، ستغطي الورقة الخامسة على الأولى بشكل كامل. وتحلّ الطبيعة هذه المشكلة بالاستعانة بالنسبة الذهبية. إذ تنمو أوراق العديد من النباتات بحيث تلتفّ كل ورقة بمقدار 1.618 لفّة (تقريبًا) حول الساق. وهو ما يساوي التفافة كاملة (أي 360 درجة) زائدًا 222.5 درجة تقريبًا. ولأن هذه الزاوية مرتبطة بالنسبة الذهبية،التي لا تعيد نفسها بالمقدار نفسه قطّ لكونها قيمة غير نسبية، لا يكون هناك حجب تام لأيّ ورقة أبدًا مهما نمت النبتة وارتفعت.



كما أدّى التوازن البصري الخاص بالمستطيل ذي الأبعاد التي تتبع النسبة الذهبية، والذي يبعث على السعادة، إلى استخدامه في العديد من التصاميم الحديثة، مثل: شاشات التلفاز والنوافذ وأُطر الأبواب والمجلات وأخيرًا، بطاقات الائتمان.

معدلات ذات معنى

كلنا نعرف المعدلات: فهي تمثل الحلّ الوسط أو منتصف الطريق. ومع هذا، فهناك عدة طرق لحسابها وتعطي هذه الطرق نتائج متباينة، مما يجعلها مضللة ويُسَهّل إساءة استخدامها.

إساءة التعبير عما هو بديهي

تمعن في العبارات التالية:

«أداء نصف أطفال البلاد في مادة الرياضيات دون المتوسط!» (عنوان في جريدة «ذا تايمز»)

«لدى العائلة الواحدة في المعدل 2.3 من الأطفال.»

«لدى أغلب الأشخاص أكثر من معدل عدد الأرجُل.»

ومع أن كل هذه العبارات صحيحة من الناحية الفنية، فإنه ليس ثمة واحدة منها مفيدة بشكل خاص، والعبارة الأخيرة تحديدًا تجعلنا نضحك لا غير. وهناك مبدئيًا ثلاث طرق مختلفة تمامًا لحساب المعدل، وكل منها يناسب حالة معينة. وما يؤدي إلى نتائج سخيفة أو مضللة كتلك أعلاه هو استخدام الطريقة الخاطئة أو غيرالمناسبة.

المتوسط والوسيط والمنوال

إن أكثر المعدلات شيوعًا هو **المتوسط الحسابي**، الذي يتأتّى ببساطة من جمع كل القيم وقسمتها على عددها. مثلًا، المعدل الوسطي للقيم 2، و6، و7 هو 5، إذ إن 2 + 6 + 7 = 15، و15 ÷ 3 = 5، لكن هذا لا يعطينا فكرة عن مقدار القيم نفسها. فعلى سبيل المثال، متوسط القيم -82، وصفر، و100، و2 هو أيضًا 5. إذًا استخدام المتوسط الحسابي في العبارة عن الـ 2.3 من الأطفال هو ما أعطاها الطابع غير المنطقي، رغم سلامتها رياضيًا.

والبديل يكمن في إيجاد **الوسيط الحسابي**. ويفيد الأخير عندما نرغب في التعرف - مثلًا - على ما قد يُحصِّله طالب ما في امتحان في المعدل. ولحساب الوسيط، تُرَتَّب جميع درجات الطلاب تصاعديًا، ليكون الوسيط ببساطة هو القيمة الواقعة في المنتصف. أما إذا كان عدد النتائج أو القيم زوجيًا يقع الوسيط عندها بين القيمتين الوسطيتين، وبما أن نصف الأعداد في القائمة أقل من القيمة الوسطية دائمًا، فإن استخدام الوسيط الحسابي يحتم صحة عنوان جريدة «ذا تايمز»؛ إذ مهما كان أداء الأطفال مبهرًا، فإن نصفهم سيكون دائمًا دون المعدل الوسيط.

أحيانًا لا يفيدنا استخدام لا المتوسط ولا الوسيط، وذلك عندما نقصد ببحثنا عن المعدل قياس القيمة الأكثر شيوعًا أو شعبية أو تكرارًا. ولنفترض أن شركة أبحاث تسويقية ترغب في معرفة عدد الإجازات التي تقضيها العائلات سنويًا. وبسؤال العائلات العشر التي تقطن حيّ الأعشار الوهمي، لعلها تحصل على الأجوبة التالية: 1، 1، 1، 1، 1، 2، 2، 3، 4، 5. فما هو الجواب الأكثر تعبيرًا عن المعدل؟

المتوسط الحسابي سيكون (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 5) ÷ 10 = 2.1. أما الوسيط، فهو 1.5 (أي منتصف الطريق بين القيمتين 1 و2 الواقعتين في المنتصف)، لكن كلتا القيمتين مضللتان، فلا يمكن للمرء أن يذهب في نصف إجازة، أو كسر منها! والأكثر منطقية هو أن ننظر إلى الجواب الأكثر تكرارًا، ألا وهو 1. ويعرف هذا **بالمنوال الحسابي**، أو **المعدل المنوالي**. حتى أنه لدى الفرنسيين تعبير à la mode، ويعني «رائج» أو «على الموضة» وفي هذه الحالة، يكون المنوال هو 1 لأنه الجواب الأكثر تكرارًا: فالمعدل المنوالي لإجازات عوائل حي الأعشار هو رحلة واحدة في السنة.

ومجموع النقاط هو

يعتبر ترصيد مجموع النقاط في المسابقات باستخدام متوسط النقاط التي يمنحها كل حكم من الحكام عملية تعتمد على التقدير الشخصي. فماذا لو تفاوتت آراء الحُكام بسبب ميول شخصية أو انحيازات سياسية؟ ثمة طريقة بارعة وبسيطة في الوقت ذاته لحل هذه المعضلة تعتمد على نوع مختلف من التوسيط الحسابي، يُشار إليه عادةً باسم «المتوسط الشرطي». في هذا النظام، لا يؤخذ بأعلى وأدنى نتيجة لكل متسابق، وبذلك يُرجَّح احتمال وجود حكم مفرط الحماس (أو حتى مُغرض!) بدرجة تؤثّر في المتوسط لأعلى أو لأسفل بصورة غير طبيعية.

إذًا عليك اتباع ما هو ملائم ومنطقي عند اختيارك لكيفية التعبير عن المعدلات. إذ تصدق العبارة القائلة بأن أغلب الأشخاص لديهم أكثر من معدل عدد الأرجُل فقط على المتوسط أو الوسيط، وذلك لأن الأقلية من الناس برِجْل واحدة فقط، أو حتى بدون أرجُل، يخفضون المعدل إلى أقل من اثنين وهو ربما بين 1.99 و2. لكن الجواب المنطقي يكون بالحديث عن المعدل المنوالي، وهو بالطبع رِجْلان لكل شخص.

جيم للجبر

ط = ك $س^2$. $أ^2$ + $ب^2$ = $ج^2$. هل تبدو هذه مألوفة؟ يُجسِّد علم الجبر جُلّ معاناة الكثير من الناس مع الرياضيات واستصعابهم لها: إذ كانت تبدو بلا جدوى أو معنى، وحتى يومنا هذا، تحمل هذه اللفظة كثيرًا من المشاعر السلبية في الغالب. والحقيقة أنه لا داعي لكل هذا: إذ يمكن بالفعل النظر إلى الجبر نظرة مختلفة تمامًا.

«يستند القرار الجيد على المعرفة وليس على الأرقام.”

أفلاطون (حوالي 428 قبل الميلاد -347 قبل الميلاد)

ما المقصود بالجبر بالضبط؟

وربما لا يتجاوز تعريفًا مبدئيًا لعلم الجبر وصفه بأنه «حروف ومعادلات»، لكن هذا لا يساعدنا على فهم المغزى منه، أو حتى الفائدة من تعلمه، ولذلك، إليك تعريفًا مختلفًا بعض الشيء:

الجبر جزء من لغة الرياضيات تُستخدم فيه الرموز للتعويض عن الأعداد.

وهذه ليست فكرة معقَّدة بحد ذاتها. إذ نستعمل الرموز بشكل دائم لتمثيل شيء آخر: كالباركود، ومخططات التوصيلات الكهربائية، والعدّ بواسطة الشَرْطات، أو التقاطعات، أو الأسهم، فلماذا لا نستخدم الحرف أ، أو ب، أو س، للنيابة عن عدد ما؟

منظومة صالحة لجميع الأغراض

يُمَكِّننا الجبر من التفكير بحيث لا نكون محصورين بعدد معين، أو بمدى من الأعداد. فهو يتيح لنا إطلاق تعميمات رياضية عن السلوك المتوقع للأعداد تحت شروط محددة معروفة مسبقًا. مثلًا، لربما مرّت عليك حيل من نوع «فكّر في رقم ...» ويبدو أنها تفلح دائمًا، لكن كيف لأصحابها أن يكونوا متأكدين تمامًا من قدرتهم على التنبؤ بالجواب الصحيح؟ وفي التالي مثال بسيط للتوضيح.

فكّر في رقم
ضاعفه
أضف 6
اقسم على 2
اطرح من الناتج العدد الأصلي
الجواب الذي حصلت عليه هو 3

لكن هل يكون الجواب 3 دائمًا؟ كيف لنا أن نبرهن على صلاحية الحيلة لأيّ عدد يُختار؟ هل يمكن أن نبدأ بعدد معين لا يصلح هنا؟ وللإجابة عن هذا السؤال، نلجأ لشيء من الجبر البسيط.

عوضًا عن تجربة أعداد محددة، لنبدأ بـ س. ولهذا الرمز أن ينوب عن ما يحلو لنا من الأعداد.

• مضاعفة س تعطينا 2س (2 ضرب س، أو «2 من هذا الشيء الذي سمّيناه س»).

- إضافة 6 تعطينا 2س + 6. ولاحظ أننا لا نضيف ستة من عددنا المختار (ولو فعلنا فستكون 6س إضافية)؛ إنما نضيف العدد 6 بالتحديد، وكما ورد في الحيلة.
- والآن، علينا أن نقسم على اثنين. وهذا يعني تنصيف جُزْأَيْ 2س + 6. ونصف 2س يعطي س، أمّا نصف 6 هو 3، وبذلك يكون نصف 2س + 6 هو س + 3.
- أخيرًا، يجب أن نطرح العدد الذي بدأنا به، وهذه العبارة هي التي تحمل جوهر الحيلة. فنحن ببساطة نزيل ما اخترناه في البداية - ألا وهو العدد الذي سمّيناه س. فبأخذ س من س + 3، يتبقى لدينا 3 فقط. وكل ما نفذناه من عمليات لم يهتم لحجم العدد الأصلي، وبذلك نكون قد أثبتنا نجاح الحيلة مهما كان العدد الذي تنوب عنه س.

لماذا يعتبر الجبر مهمًا جدًا؟

تنطوي فكرة جعل رمز يحلّ محلّ أيّ عدد على الإطلاق على قوة رهيبة، فهي تفتح المجال للسؤال «ماذا لو؟» فيما يخص قدرًا هائلًا من الاحتمالات، أو المتغيرات، كما يسميها دارسو الرياضيات. وقد شكّل علم الجبر أساس حساب التفاضل والتكامل، ما اعتُبر خطوة هائلة نحو الأمام في تاريخ التفكير الرياضي. إذ تكشّفت عن طريقه عوالم كاملة في حقول الهندسة والفيزياء، ولولا الجبر، لما كنا قد تمكّنّا من الذهاب إلى القمر أو بناء طائرات عملاقة أو حتى حواسيب.

ومن أوائل إنجازات ك. ف. غاوْس (انظر الصفحة 26) التي جعلته مَحَطّ الأنظار هي تخمينه للمكان الذي يتوجب على الفلكيين البحث فيه عن كويكب سيريس. فعندما أُعيد اكتشاف هذا الكوكب الصغير «الضائع،» في العام 1801، كان موقعه بالضبط في المكان نفسه الذي تنبأ به غاوس في حساباته الجبرية.

المعادلات

تُعدّ المعادلات، رغم سمعتها السيئة، جزءًا أساسيًا من علم الجبر. وهي بأبسط صورها لا تعدو كونها جُمَلًا تَعِدُ بأن عبارتين جبريتين أو أكثر تتساويان في القيمة. وتُحَلّ المعادلات بايجاد قيم الرموز التي تمثل الأجزاء المجهولة من هذه الجمل أو المعادلات. وكثيرًا ما يصف الرياضيون المعادلات بأنها جميلة. ومع أن هذه الفكرة قد تُضحكك (أو تُبكيك)، لا يمكن إنكار ما تملكه المعادلات من قدرة على إظهار الحقيقة، والتيقّن من ما هو أكيد، بل وبيان المنطق، وهو ما يقدره أناس كثر، بل ويسعدهم أيضًا.

ما أهمية الجبر؟

إن فكرة جعل رمز ما يمثل أيّ رقم من الأرقام تُعدّ من الأفكار الفعالة بدرجة مذهلة؛ نظرًا لأنها تجعلنا نتساءل «ماذا لو؟» بشأن مجموعة كاملة من الأحوال أو، كما قد يطلق عليها الرياضياتيون، المتغيرات. وقد شكل الجبر أساسًا لحساب التفاضل والتكامل الذي يعد خطوة كبيرة للأمام في مجال التفكير الرياضياتي، يفتح الباب على احتمالات في مجالات مثل الهندسة والفيزياء. وبدون الجبر، لم نكن لنستطيع الصعود إلى القمر، أو تصنيع طائرات الجامبو النفاثة، أو أجهزة الحاسوب.

من الأمور التي لفتت أنظار الناس عامةً نحو «ك.ف. غاوس» (انظر صفحة 26) تنبؤاته بالمكان الذي يتعيَّن على روَّاد الفضاء البحث فيه عن كويكب «سيريس» فعندما أُعيد اكتشاف هذا الكويكب «المفقود» في عام 1801، كان بالفعل هو المكان الذي قال «غاوس» إنه من المفترض أن يكون فيه

المعادلات

المعادلات هي واحدة من أكثر الأجزاء المفترى عليها رغم أهميتها الشديدة في الجبر. فهي في أبسط صورها مجرد عبارات تشير إلى تعبيرين، أو أكثر متساويين في القيمة. وينطوي حل المعادلات على العثور على قيمة الرموز المعبرة عن الأجزاء غير المعلومة من هذه العبارات. وعادةً ما يصف علماء الرياضيات المعادلات بأنها جميلة. وعلى الرغم من أن هذه الفكرة ربما تروق لك، أو (تثير استياءك)، فلا شكّ في أنها تنطوي على إمكانية الكشف عن الحقيقة واليقين والمنطق معًا في آن واحد، ويرى العديد من الناس ذلك الأمر مبهجًا للغاية.

أسس الأعداد

يعتمد نظامنا الغربي للأعداد على مضاعفات 10، ويُعرَف بنظام «العدّ العشريّ» أو «أساس 10». وذلك أمر نعتبره في الغالب من المسلمات، لكن في حقيقة الأمر ليس هناك حدّ معين للأعداد ذات الأسس الممكنة التي يمكننا استخدامها. بل إننا في الحقيقة نعمل بأسس أخرى كذلك دون حتى أن ندركها.

العمل بأسس مختلفة

يبدو حاصل الجمع التالي مألوفًا من أيام المدرسة حينما تعلمت أن تبدأ بالآحاد من اليمين وأن «ترحل» العشرات إلى العمود التالي على اليسار (المئات)، فتزيد قيمة كل عمود من اليمين إلى اليسار بمقدار عشرة أضعاف (آحاد u فعشرات t فمئات h ...إلخ).

مبرهنة فيرما الأخيرة

من أكثر المعادلات المثيرة للجدل في القرن العشرين كانت ‹مبرهنة فيرما الأخيرة›. حيث توصل عالم الرياضيات الفرنسي ‘بيير دي فيرما’ (1601 - 1665) إلى إمكانية جمع قيمتين تربيعيتين للحصول على قيمة تربيعية أخرى.

مثال:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$5^2 + 12^2 = 13^2$$

كانت مبرهنته تتمثل في أنه لا يمكن عمل ذلك باستخدام أيّ قيمة غير التربيعية؛ لا القيم التكعيبية (س^3)، ولا القوة الرباعية (س^4) ولا أكثر من ذلك. فافترض «فيرما» -بالتعبير الجبري- أنه إذا كان ‹أ› و ‹ب› عددًا صحيحًا موجبًا، فإن ‹أ^n› + ‹ب^n› = ‹ج^n› هي معادلة لا حلول لها إن كانت قيمة n أكثر من 2.

وكان إثبات ذلك من التحديات التي حيرت أجيالًا من علماء الرياضيات، وظلت تلك المبرهنة البسيطة في مظهرها غير قابلة للإثبات لأكثر من ثلاثة قرون، حتى حلها عالم الرياضيات البريطاني «أندرو وايلز» في عام 1995.

وكان «فيرما» نفسه قد كتب متحيذرًا: «عندي إثبات مدهش حقًا لهذه الفرضية لا يتسع له هذا الهامش.» وإننا لن نعرف مطلقًا ما إذا كان على صوابٍ!

إن معادلة ‹فيرما› هي مثال بديع على كيفية دمج البساطة والتعقيد في عبارة واحدة ملفتة للانتباه وجميلة لواحدة من الحقائق الرياضياتية.

h t u

8 5 2

7 7 1

5 3 4

1 1

لكن عليك أن تفكر في كيفية جمع أطوال زمنية - لنقل مثلًا 13 ساعة (h) و25 دقيقة (m)، و11 ساعة و50 دقيقة.

h m

25 13

50 11

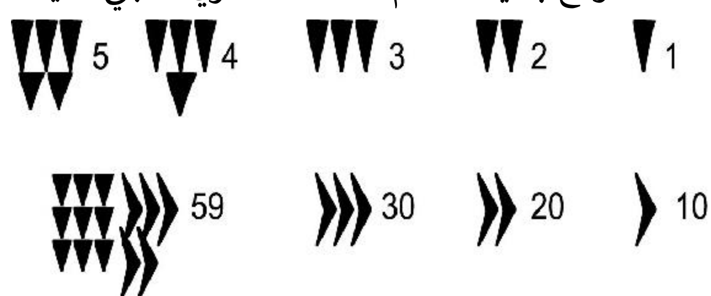
15 25

1

سواءً ألاحظت أم لا، فقد عملت بأساس 60 لتحصل على النتيجة؛ نظرًا لأن الساعة تتكون من 60 دقيقة. هذا علاوةً على أنك إذا كنت تعبِّر عن المجموع بالأيام، فسوف تحوِّل الأساس إلى 24 وتحصل على 1 يوم، 1 ساعة، 15 دقيقة.

أصداء بابل القديمة

إن الأساس 10 يتطلب 10 رموز مختلفة (بما في ذلك الصفر بالغ الأهمية؛ انظر صفحة 134) لاستنتاج كل قيمة من القيم الرقمية:
0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9. اشتغل البابليون القدماء على أساس مدهش هو الـ 60. فقد ألحقوا 1 بـ 10 رموز فريدة، لكن رمز الـ 11 كان رمز «10» إلى جوار رمز «1». وكان أكبر رقم وهو 59 مكونًا من 50 (خمسة رموز من «10» معًا) و9 (تسعة رموز من «1»). الأمر منطقيّ إلى حدٍّ ما، ومع بدايات نظام أساسنا العشريّ المبني عليه.



فلماذا اختاروا هذا الأساس الكبير؟ غالبًا لأن الرقم 60 يشتمل على عدد كبير من العوامل (1، 2، 3، 4، 5، 6، 10، 12، 15، 20، 30 كلها تدخل في قسمة الـ 60 بالتمام)، وبذلك كان من السهل قسمة الأشياء.

يساعد هذا الأساس، القديم في زمنه والمتسع في استيعابه على إيضاح سبب تصميم الساعات على هيئة دوائر مقسمة إلى 60، وفي الهندسة وحساب التفاضل والتكامل، تقاس الزوايا عادةً بالدرجات حتى 360° (6×60).

العمل بأسس مختلفة

قد تستخدم الأسس أعدادًا مختلفة من الرموز، لكن كلها تعمل بطريقة واحدة. فربما توضع في أعمدة، أو «خانات»، مع وضع الآحاد (تكرارات الـ 1) على اليمين، ثم رقم الأساس، وقيمة كل خانة على اليسار مضروبةً في رقم الأساس لتحديد القيمة التالية. فبالنسبة للأساس 10، تعتبر خانات الآحاد (تكرارات الـ 1)، والعشرات (1 × 10)، والمئات (10 × 10)، وما إلى ذلك. وبالنسبة للأساس 3، يكون التكرار الواحد من الـ 3 (1 × 3)، 9 (3 × 3)، 27 (9 × 3)، 81 (27 × 3) إلخ. فما قيم الخانات الأربعة الأولى للأساس 5؟

إذًا، كيف تكون إعادة صياغة، لنَقُل 176، بالأساس 3؟ نبدأ بأكبر قيمة مبنية على الأساس 3 أقل من 176 وهي 81. لإيجاد قيمة كل خانة أقل، ونسأل: كم مرة يدخل هذا الرقم فيما يتبقى؟

كم عدد تكرارات 81 في 176؟	كم عدد تكرارات 27 في 14؟	كم عدد تكرارات 9 في 14؟	كم عدد تكرارات 3 في 5؟	كم عدد تكرارات 1 في 2؟
2	0	1	1	2
162 = 2 × 81؛ يتبقى 14 (162 − 176)	27 أكبر من أن يدخل في 14	يتبقى 5 (9 − 14)	يتبقى 2 (3 − 5)	

إذًا، فالرقم 176 المعبر عنه بالأساس 3 هو 20112.

النظام الثنائي (الحلول في صفحة 152)

إن الأساس 2، أو النظام الثنائي، له أهمية خاصة في مجال العلوم. حيث إنه نظرًا لاستخدام الرقمين 0 و 1 فقط، فإنهما يمكن الدلالة عليهما بـ «فتح» و«غلق»، أو النبض الكهربي أو انعدام النبض، وذلك هو أساس كل «العقول» الحاسوبية.

إذا كانت العناوين هي 1 و 2 و 4 و 8 ...إلخ، فهل يمكنك استنتاج:

- كيف يمكن كتابة الرقم 5 بنظام ثنائي؟
- كيف يمكن كتابة الرقم الثنائي 110 بالأساس 10؟

فاصل تثقيفي
علماء رياضيات مشهورون
هناك العديد من جهابذة الرياضيات ممن أسهموا في توسيع مداركنا باكتشافاتهم الفذة. بعضهم لهم أسماء يعرفها القاصي والداني مثل «إسحاق نيوتن» و«أرشميدس» و«ألبرت أينشتين»، لكن هناك الكثير ممن سقطوا من سجلات «كبارالمشاهير» على الرغم من إنجازاتهم الهائلة. إليكم عددًا من الأشخاص الأقل شهرةً ممن رسموا ملامح، ليس الرياضيات فحسب، بل وطريقة تفكيرنا ذاتها.

ماري صوفي جرمين (1776 - 1831) على الرغم من موهبتها الفذة كعالمة رياضيات طبيعية من القرن الثامن عشر والتاسع عشر، فإنها أُقصيت من الاشتغال بالرياضيات بسبب جنسها كأنثى.

ومع قلة التدريب الرسمي الذي حصلت عليه، تمكنت من الدراسة في الخفاء، وتواصلت لفترة طويلة، وصلت إلى الصداقة، مع «ك.ف. غاوس» (انظر صفحة 26) الذي أثنى كثيرًا على عملها على نظرية الأرقام ومبرهنة فيرما الأخيرة. ولفترة طويلة من عمرها المهني، كانت تتظاهر بأنها رجل عند التواصل مع علماء الرياضيات الآخرين مخافة ألا يؤخذ كلامها على محمل الجد.

سرينفاسا رامانجن (1887 - 1920) الكثير في الغرب، على الأقل خارج الدوائر الأكاديمية، لا يعلمون شيئًا عن الهندي «رامانجن» الذي كان من المفكرين المتأصِّلين ممن تعلّموا الكثير ذاتيًا. من القصص المتداولة عنه أنه حينما زار أكسفورد لمقابلة الرياضياتي «غ.ه. هاردي» مستقلًا سيارة أجرة تحمل الرقم 1729، علّق «هاردي» على الرقم بأنه سخيف، فقاطعه «رامانجن» قائلًا إن الرقم 1729 هو (بالطبع) أصغر عدد يمكن التعبير عنه كمجموع قيمتي قوة رباعية بطريقتين مختلفتين.ربما تكون لاحظت ذلك!
«ديفيد بلاكويل» (1919) وُلد «بلاكويل» في الولايات المتحدة، وحصل على الدكتوراه في الرياضيات في سن مبكرة جدًا
(22 عامًا). ربما يكون هو أبرع علماء الرياضيات الأفروأمريكيين، وربما لو وُلد متأخرًا 50 سنة لنال من الصيت والشهرة ما يليق بموهبته. و تتركز نقطة قوته في الإحصاء، وشارك في كتابة Games and Statistical Decisions (الألعاب والقرارات الإحصائية) في عام 1954. وفي عام 1965، صار «بلاكويل» أول أفروأمريكي يلتحق بالأكاديمية الوطنية للعلوم.

ويليام روان هاميلتون (1805 - 1865) ابتكر عالم الرياضيات الأكثر شهرة وعبقريةً في أيرلندا «هاميلتون» فكرة الكواتيرنيونات (المرباعيات) التي سمحت للرقم -1 بأن يشتمل على جذور تربيعية متعددة وليس على جذر واحد فحسب (انظر صفحة 147). وقد كان لهذا الاكتشاف مردودات عظيمة الأثر بالنسبة للرياضياتيين والفيزيائيين في العالم أجمع، لكنه لم ينل مطلقًا ما يستحق من الاهتمام؛ ويرجع ذلك جزئيًا إلى التعقيد البالغ لفكرته بشكل لا يفهمه إلا الرياضياتيون!
الخوارزمي (780 م - 840 م) يقترن اسم هذا العالم الفذّ الفارسيّ الأصل بإسهاماته البارزة في الجغرافيا والفلك، لكن أكثر شيء اشتهر به هو أعماله العظيمة في علم الجبر. فلقد كان العالَم أجمع يعتمد كليًا على الرياضيات الإغريقية المحدودة المبنية على الهندسة حتى جاء ʼالخوارزميʼ واستخدم الحروف في تعميم الأرقام. وجدير بالذكر أن مصطلح «خوارزمية» مشتق من اسم «الخوارزمي». كما أنه قدم للغرب نظام الترقيم العربي.

جون نابير (1550 - 1617) يرجع الفضل لعالم الرياضيات الاسكتلندي الثري المالك للأراضي «نابير» باختراع لوغاريتمات، عن طريق المصادفة، أدت بدورها إلى بعض الاكتشافات الكبرى في الرياضيات. وقد اخترق مجالًا جديدًا عندما نشر
A Description of the Admirable Table of Logarithms (وصف جدول اللوغاريتمات

المثير للإعجاب) في عام 1614، الذي وجه أنظار العالم بشكل متزايد نحو اللوغاريتمات. وقد نال ’نابير’ شهرةً واسعةً، وحقَّق ما يمكن وصفه بأكبر قدر من النجومية العلمية شهدتها اسكتلندا في القرنين السادس عشر والسابع عشر. وكان الكثير من الناس قد جربوا أعماله فيما يخص «قضبان نابير» أو«عظام نابير»، وهي موجوعة من العصي تسمح بعمليات ضرب معقدة بسرعة شديدة.

هيباتيا السكندرية (370 - 415) عُرفت بصفة عامة بأنها أول عالمة رياضيات (امرأة) في التاريخ، ويكفي أن الفنان الشهير «رفاييل» هو من رسمها. وقد طُمرت الكثير من التفاصيل عن حياتها بسبب السياسة الدينية السائدة آنذاك، غير أننا نعلم أنها كانت معلمة رياضيات ومحاضِرة في الفلسفة في مصر خلال القرن الرابع الميلادي، وأنها كتبت نصوصًا وتعليقات رياضياتية، بالإضافة إلى تحريرها. ولقيت مصرعها في الغالب على يد طائفة الزيلوت التي عارضت وضعها؛ نظرًا لأنها كانت تتمتع بقبول واحترام الجنسين على سواء بسبب عقليتها المستنيرة وأخلاقياتها الراقية.

براهماغوبتا (598 - 670) من الصعوبة بمكان تأليف مرجع عن الرياضيات، فما بالك بتأليفه في صورة أبيات شعرية. ذلك ما فعله «براهماغوبتا» في عام 628 في مرجعه «السند هند». وهو من الإنجازات البارزة لسببين: أولهما أنه كان أول مرجع يشير إلى الصفر كرقم في حدّ ذاته، والثاني أنه كان أول كتاب ينشر صيغة لحل المعادلات التربيعية.

آدا لوفلايس (1815 - 1852) هي ابنة «اللورد بايرون» وكانت رائدة في العمليات الحسابية. ويُقتبس منها قولها «في كل عملية حسابية، يمكن إيجاد مجموعة متنوعة من الترتيبات لمتتاليات العمليات أحد عناصرها الأساسية اختيار ذلك الترتيب المفترض أن يقلل الوقت اللازم لإتمام العملية الحسابية لأدنى قيمة ممكنة.» وذلك ينفع لأن يكون ملخصًا لهذا الكتاب!

4
الرياضيات اليومية

تملأ الأرقام والحسابات حياتنا اليومية، سواء أكان لحساب باقي ثمن المشتريات، أم لوضع ميزانية منزلية تفصيلية، أم لتسجيل أعمارأبنائك، أم لقياس قماش فساتين وصيفات العروس. وكلما انتبهنا أكثر للأرقام، قد نجد لدينا اهتمامًا أكبر بمدى تكامل الرياضيات مع جوانب عديدة في الحياة، من بورصة الأسهم إلى نظام الملاحة بالأقمارالصناعية لسيارتك.

تواجهنا من حين لآخر الأرقام التي تتطلب تفكيرًا أكثر: هل هذا العرض الخاص على السلعة يستحق فعلًا؟ كيف أختار أفضل صفقة للاقتراض من بين الفرص المعروضة عليّ؟ ماذا تعني أسعار الفائدة المتنوعة بالمصطلحات النقدية الفعلية؟ فإذا تقمصت شخصية النعامة، ودفنت رأسك في الرمال بدلًا من مواجهة الواقع وراء الأرقام، فذلك يمكن أن يعني ضياع فرص جيدة، أو -ما هو أسوأ من ذلك- فقدان فرصة توصيلك بسيارة أحدهم.

قوى السوق

من أكثر الصور التي نعايشها مع الرياضيات أوقات التسوق. ربما لا نستطيع السيطرة الكاملة على مقدار ما ندفعه، لكن بإمكاننا الانتباه إلى بعض العوامل المؤثرة في الأسعار لئلا ننخدع بعروض الصفقات «الجيدة» الوهمية.

وفورات الحجم الكبير

ما العلاقة بين كبر حكم المتجر وبين قدرته على خفض أسعار السلع التي يعرضها؟ الأمر هنا يتعلق أكثر بمسألة وفورات الحجم الكبير.

لنفترض أنني أردت استيراد سيارة من اليابان لكي أبيعها لزبون. ففي كل مرة أقوم بطلبية سيارات، يتوجب عليّ دفع تكلفة المصنع (لنقل 6000 دولار لكل سيارة) وتكلفة الشحن (1000 دولار) وتكلفة ترخيص استيراد سيارات (1000 دولار)، وأخيرًا إيجار منشأة التخزين (1000 دولار). إذا طبقنا ذلك على سيارة واحدة، فهذا يعني أنني يجب أن آخذ من الزبون 9000 دولار (كتكلفة للقطعة) عن كل سيارة لسداد التكاليف فحسب.أما إذا كان لدي أربعة زبائن، فيمكن أن أقسّم بينهم تكلفة الشحن والترخيص والتخزين. وهذا يعني أن إجمالي التكاليف بالنسبة لي الآن تساوي 27000 دولار، غير أن تكلفة القطعة إجمالي التكاليف التي أتحمّلها مقسّمة على عدد القطع (4) ستنخفض إلى 6750 دولار، بفارق 2250 دولار أو 39%.

هذا التقسيم للتكاليف عندما يحدث على نطاق واسع يجعل من الممكن للمشترين بأحجام كبيرة عادةً أن يدفعوا أقل من المشترين بأحجام صغيرة. فربما لا يصلح من الناحية المالية شحن 1000 دمية مثلًا لمسافة تقارب نصف العالم، بينما يمكنك ضمن صفقات مليونية أن توجد جدوى اقتصادية من الاستيراد من دول تورّد كميات ضخمة من البضائع بتكلفة أقل للوحدة، حتى وإن دخلت في الحسبة تكاليف الشحن.

يمنحك التعامل بأرقام كبيرة أيضًا شيئًا من «القوة الشرائية». فالمتاجر الكبيرة حاليًا تشتري 80% من كل المواد الغذائية المزروعة تجاريًا، بينما يكون المزارعون عادةً مستعدين لقبول سعر أقل للوحدة من إنتاجهم في مقابل ضمان البيع بحجم كبير.

هناك بالمثل وفرة في الأحجام الكبير مع المنتجات الفردية. فالمتاجر يمكن أن تعرض عبوات كبيرة من مسحوق الحساء أو رقائق التورتيلا بسعر أفضل حسب الوزن عنه مع العبوات الصغيرة، ومن ضمن العوامل انخفاض تكلفة التعبئة نسبةً إلى المحتوى المباع.

هل هي صفقة بالفعل؟

من المفيد أن تستحضر مهاراتك الرياضياتية معك أثناء التسوق. فالنقود إن كانت محدودة، يلزمك التأكد من اقتناص أفضل الصفقات. ومن جانبها تجد المتاجر دومًا تسعى إلى صرف انتباهنا نحو صفقات «لا تفوَّت» من أجل أن تدفعنا دفعًا لأن نخرج ما بجيوبنا من نقود، لكن السؤال الذي يطرح نفسه هو: هل هذه العروض تساوي فعلًا تلك الضجة المثارة؟ الأمر ليس كذلك على الدوام، ولتمييز الصفقة الحقيقية من الصورية، يفضل أن تمارس المهارات الحسابية التي أتقنتها بعد قراءة الفصل الثاني.

ثمة عبارة تسويقية غير جذابة لكن يشيع ترديدها في الأسواق هي «اشتر قطعة واحصل على أخرى مجانًا». تلك هي العبارة المباشرة، وهناك (طالما كنت تريد فعليًا كلا القطعتين المعروضتين) صفقة أخرى جيدة هي: «احصل على قطعتين بسعر واحدة».

ثمة عرض آخر شائع هو «احصل على 3 بسعر 2». قد يحتار البعض في التمييز بين العبارتين الأخيرتين وبين الأولى «اشتر قطعة واحصل على أخرى مجانًا»، وفي كل الأحوال فيما يبدو أنك ستحصل على قطعة مجانًا في كلا الصفقتين. لكن قبل أن تنجرف لقبول العرض، عليك أن تتوقف لحظة، وتجري عملية حسابية داخل رأسك. فأنت ترجو أن توفر ثلث ثمن كل قطعة منها. أما إذا اتسع العرض ليشمل أكثر من صنف وليس صنفًا واحدًا، فمن الراجح أن المتجر يعرض الصنف الأرخص ثمنًا دون مقابل، وإذا كان سعر القطعة خارج العرض منخفضًا، فكم وفرت منه حينئذ؟ وسؤال آخر لا بد أن تطرحه هو هل تريد هذا الصنف الثالث؟ وضع في اعتبارك أيضًا تغيُّر النسب (انظر صفحة 58) لتستطيع مراعاة النسب والتناسب.

فهذه الصفقات ليست بالضرورة سيئة، لكن يلزمك قبل كل شيء أن تكون حصيفًا حينما تتسوق بتلك العروض المزعومة.

المتجر	أسعار النقانق	أسعار البطاطس
آلز	39 بنسًا للقطعة	26 بنسًا لكل كيس زنة 100 غ
بامبر بارغينز	53 بنسًا للقطعة (لكن 4 بسعر 3 لهذا اليوم)	نبيع فقط أكياس زنة 200 غ بسعر 49 بنسًا للقطعة.
كات يور كوستس كورنر مارت	45 بنسًا للقطعة (لكن مع خصم 10% لهذا اليوم)	نبيع فقط أكياسًا زنة 500 غ بسعر 2.40 جنيهًا للقطعة، لكن اليوم يمكنك شراء كيس والحصول على آخر مجانًا

النقانق والبطاطس المهروسة (الحل في صفحة 152)

أصدقاء أبنائك قادمون لحفل شاي، وتحتاج إلى 12 إصبع نقانق وكيلوغرام واحد من البطاطس.
هناك العديد من العروض الخاصة حولك:
يلزمك إيجاد أجوبة عن الأسئلة التالية:

- من أين تأتي بالنقانق؟
- ماذا عن البطاطس؟
- إلى أين تتوجه إن لم يسمح وقتك إلا بزيارة متجر واحد فقط؟

قيمة التقدير

نشعر أحيانًا بالضجر من تفاصيل الحسابات الرياضياتية، ونركن إلى حقيقة أن كل ما يلزمنا مجرد أرقام مقربة على النحو المناسب. وإننا بمجرد أن ندرك ذلك، نستطيع أن نبسط المسألة، ونعثر على أقرب الطرق لحلها.

الباركود

أغلب الظن أنك لا تلقي عليها نظرة ثانية، لكن العملية الحسابية التي تفسر تلك الأشرطة والأرقام تعَدّ مثالًا مدهشًا على المعلومات المخفية المطلوب الكشف عنها في عالم الأرقام.

تتبع الرموز الشريطية (الباركود) نمطًا مميزًا، لعل أحد أشهرها «رمز المنتج العالمي» المكون من 12 رقمًا. فعلبة الكولا العادية تحتاج رمزًا مختلفًا عن علبة الكولا الخالية من السكر، التي تحتاج بدورها إلى رمز مختلف مكون من ست مجموعات، وهكذا دواليك، فإن لكل نوع من المنتجات المعروضة للبيع رمز باركود فريدًا، يكون أكبر رمز منها مكون من 12 رقمًا هو 999,999,999,999، ويساوي تريليون إلا واحدًا (مليون مليون، أو ألف مليار).

تتمثل براعة العملية الحسابية في الرقم الثالث عشر (عادةً ما يوجد في أول الرمز) الذي يسمى المجموع الاختباري. بالنسبة للحواسب الآلية، فإنها يجب أن تختبر ما إذا كان الرمز مقروءًا بدقة. يمكننا فعل مثل ذلك:

- أولًا، نجمع كل الأرقام الظاهرة في المواضع 1 و 3 و 5 و 7 و 9 و 11، ثم نضرب المجموع في 3.
- بعد ذلك، نجمع كل الأرقام الظاهرة في المواضع 2 و 4 و 6 و 8 و 10 و12، ثم نضيف حاصل الجمع إلى حاصل الضرب.
- نأخذ آخر رقم من المجموع الناتج، ونطرحه من 10. يساوي ذلك رقم المجموع الاختباري.

النظر فيما وراء الأرقام

عندما نواجه عملية حسابيةً ما ينبغي إجراؤها بصورة فورية -ربما استنتاج كمية الطلاء أو النسيج المفترض شراؤه، أو مقدار الإكرامية المفترض إعطاؤها للنادل- يشعر الكثير من الناس بنوع من عمى الأرقام فيتساءلون: كيف يمكنني استنتاج نسبة ذلك، أو من أين أبدأ تحويل مقاسات الحوائط إلى أوعية من الطلاء؟ وبدلًا من الشعور بالضجر من جراء صغائرالأمور، من الجيد الاشتغال على عادة النظر فيما وراء «كل هذه الأرقام» وببساطة افتراض قيمتها الفعلية.

كخطوة أولى، اسأل نفسك: هل يلزمني أن أعرف المقدار بالضبط، أم يكفيني أن أعرفه «بالتقريب»؟ وعادةً ما يكون الجواب هو الأخير.

لنفترض اقتراح إكرامية بنسبة 12.5% لفاتورة لمطعم بمبلغ 68.54 دولار. قد يبدو الأمر للوهلة الأولى مزعجًا، لكن انظر إلى الأرقام بـ «عيني التقدير». إذا علمنا أن الفاتورة بمبلغ 70 دولارًا تقريبًا، يمكننا استنتاج أن نسبة 10% منها تساوي 7 دولارات، وأن 15% منها تساوي 10.50 دولار (يعني زيادة نصف القيمة السابقة)، وبذلك فإن نسبة 12.5% تساوي القيمة التي تتوسط القيمتين الأوليين، أو ما يقرب من 8.50 دولار (في الحقيقة، الجواب التام هو 8.57 دولار، أي أن تقديرك السريع الذي توصلت إليه يزيد بالتأكيد عن القيمة الدقيقة، لكنه يفي بالغرض)

جرِّب هذا النوع من التقدير، مع اختباره على الآلة الحاسبة إن واتتك الفرصة، لترى مدى اقترابك من الهدف. فالتجربة تمكّنك من تكوين شعور بمدى التقريب، وتجعلك منتبهًا لما تمثله الأرقام فعليًا. فاجعل من تقريب الأرقام لأعلى أو لأسفل وصولًا إلى شيء ملموس يسهل إدراكه من عاداتك الشخصية.

لأعلى أم لأسفل؟

جرت العادة على أن الأعداد التي تقع في منتصف النطاق بين عددين صحيحين عشريين ينبغي تقريبها لأعلى(وبذلك فإن العدد 385 يُقرَّب لأقرب عدد عشري لأعلى وهو 390 وليس لـ 380)، لكن أيّ الطريقين هو الأصح للاختيار، أو ما مدى اقترابك من العدد التام، فذلك يتوقف أيضًا على السياق: فالعدد 4,816 يُقرَّب غالبًا لأسفل للعدد 4,800 لأنه أقرب من 4,900، لكن إذا كان يهمك ترجيح كفة السخاء(على سبيل المثال، في تقدير المستلزمات أو تخصيص الإقامة)، ففي هذه الحالة يكون العدد 4,850 أو 4,900 أكثر ملاءمة.

وجه طلاء جديد

إليك مثالًا على كيف أن التقدير -والتفكير الجانبي البسيط- يمكن أن يخلِّصك من الحسابات المجهدة وغير الضرورية.

فالطريقة المطولة لحساب مقدار الطلاء الذي تحتاجه لكي تعيد طلاء غرفة ما هي حساب حاصل ضرب ارتفاع الحوائط في طول محيط الغرفة لاستنتاج المساحة الكلية، ثم حساب مساحة كل الأبواب والنوافذ وجمعها معًا ثم طرحها من الرقم الكلي لمساحة الغرفة، ثم قسمة الناتج على قدرة طلائك على التغطية.

من الحيل البارعة التي تفي بالغرض من الناحية الرياضياتية، استخدام أحد الأبواب كدليل للتقدير. فمساحة الباب الداخلي عادةً تكون 20 قدمًا مربعًا، أو مترين مربعين. تذكر أن تلك ليست عمليات تحويل تامة، لكنها عبارة عن عمليات تقريب تعطيك أرقامًا يسهل التعامل معها. وتبين لك عبوات الطلاء بالتقريب مساحة الطلاء المتوقعة التي عادةً ما تقارب 100 قدمًا مربعًا لكل ربع غالون أو 12 م^2 لكل لتر. وبذلك يمكن لجالون واحد طلاء مساحة تعادل خمسة أبواب (ويعادل اللتر الواحد ستة أبواب). والآن يمكنك بالنظر، أو بالأذرع المفرودة إحصاء مرات تكرار مساحة الباب حول الغرفة، وذلك يمنحك تقريبًا جيدًا جدًا لمقدار الطلاء اللازم) بغض النظر عن أن مساحات النوافذ والأبواب غالبًا ما تُعوِّض بدقّةٍ حقيقة أن الحوائط أعلى من الأبواب).

من الطرق الأخرى البارعة قياس محيط حواف الغرفة بالأقدام وقسمتها على 5 لتحصل على عدد الجوالين اللازمة أو (بالأمتار ثم قسمتها على 6 للحصول على عدد اللترات) هل تمكنت من

إدراك سبب جدوى هذه الطريقة؟ تذكَر آن تَقرِّب لأعلى وليس لأسفل، ولا تنسَ طبقة البطانة قبل الوجه النهائي!

المدخرات والقروض

هل وقعت يومًا في حيرة عند حساب كم يكلفك قرض ما، أو مقدار ما تكسبه من فائدة على مدخراتك؟ فالفائدة المدفوعة على الأول والمستحقة على الثاني يمثلان طرفي الموازنة المالية، وكلاهما محكومان بقواعد الرياضيات الأساسية.

«فوائد» الرياضيات

يوافق المُقرض على إعطاء مبلغ للمقترض الذي يوافق بدوره على رده على أقساط كل قسط منها يمثل جزءًا من مبلغ القرض، مضافًا عليه فائدة معينة. وعلى المُقرض دائمًا عرض معدل الفائدة السنوية المئوية (APR) الذي بناءً عليه يُحسب المبلغ المحدد لردّ القرض. فإذا اقترضت 100 دولار على معدل فائدة سنوية 18% على سبيل المثال، يكون استحقاق الفائدة بمعدل ثابت. إذا كانت هذه الفائدة بسيطة، فبعد سنة واحدة تكون مدينًا بمبلغ 118 دولارًا حال عدم قيامك بردّ أيّ أموال.

غير أن هذه الصورة اليسيرة يعقّدها عاملان. إذا كنت تردّ بانتظام قسطًا من المبلغ الذي اقترضته (ويُعرف بأنه «رأس المال»)، يقلّ إجمالي الدين، ومعه يقلّ مبلغ الفائدة الذي تدين به كذلك.

أما العامل الثاني في التعقيد فيتمثل في الفائدة المركبة.فلتتخيّل حساب توفير يعلن عن معدل جذاب للادخار، هو 12% لكل سنة: إذا كنت تستثمر 100 دولار، فكم يبلغ المال الذي تحصل عليه بنهاية السنة؟ من المفترض أن تعطيك الفائدة البسيطة 112 دولارًا، لكن مع الفائدة المركبة (التي تُحسب بها كل معدلات الادخار والقروض)، فإنك ستحقق فعليًا ربحًا طفيفًا.

ففي المركبة، يُقسم المعدل السنوي على 12 ليعطيك معدلًا شهريًا، هو 10% في حسابك المفترض. وبجمع هذه الفائدة المكتسبة مع مبلغ الـ 100 دولار المبدئي، فذلك يعني أن المال الذي يدرّ فوائد يزداد هو الآخر شهرًا بشهر، نظرًا لأن فائدتك تدرّ فائدة هي الأخرى.

يوضّح الجدول التالي ما يحدث. كما ترى، يصل المبلغ النهائي إلى ما يزيد عن 112 دولارًا الذي ربما اكتسبته من الفائدة البسيطة.

الشهر	الوديعة	الفائدة	الرصيد
أول يناير	S100.00	$1.00	$101.00
آخر يناير	S101.00	$1.01	$102.01
آخر فبراير	S102.01	$1.02	$103.03
آخر مارس	S103.03	$1.03	$104.06
آخر أبريل	S104.06	$1.04	$105.10
آخر مايو	S105.10	$105.10	$105.10
آخر يونيو	S105.10	$1.06	$107.21
آخر يوليو	S107.21	$1.07	$108.29
آخر أغسطس	S108.29	$1.08	$109.37
آخر سبتمبر	S109.37	$1.09	$110.46
آخر أكتوبر	S110.46	$1.10	$111.57
آخر نوفمبر	S111.57	$1.12	$112.68
آخر ديسمبر	S112.68	$1.13	$113.81

حساب الفائدة (الحل في صفحة 153)

ثمة صيغة بسيطة لحساب الرقم النهائي: $F = P \times (1 + i)^n$. يمثل F الرقم النهائي، و **P** هو رأس المال، و i هو سعر الفائدة السنوية، و n هو عدد السنوات. تدل قيمة n الناتجة على أن مجموع الأرقام التي بين القوسين يجب ضربه في نفسه؛ لذا فإن $(1 + i)^3$ يساوي $(1 + i) \times (1 + i) \times (1 + i)$. جرب استخدام هذه الصيغة لحساب أيٍّ من الاستثمارين التاليين يدر عائدًا أكبر.

أ- استثمار 400 يورو بفائدة مركبة 5% لكل سنة لمدة 3 سنوات. (ملاحظة: $1 + i = 1.05$)

ب- استثمار 380 يورو بفائدة مركبة 4% لمدة 5 سنوات.

تسوَّق حتى آخر نفَس؟

سواءً أكنت تشتري غسالة كهربائية، أم أريكة، أم سيارة جديدة، ربما تلاحظ أن البائع عادةً ما يتوق لمساعدتك على «توزيع تكلفة أقساط السداد». إلا أنه للوهلة الأولى، لا يبدو ذلك منطقيًا، فمن المؤكد أنه من الأفضل للمتجر الحصول على كل الأموال دفعة واحدة، أليس كذلك؟ تكمن الإجابة في العمولة التي تمنح للمتاجر مقابل بيع باقات التمويل. وعلى الرغم من أن هذه القروض تبدو في بادئ الأمر أكثر جذبًا من سداد مبلغ ضخم مرة واحدة، فإنه تلزمك بعض المهارة عند اتخاذ قرار ما إذا كانت هي الخيار الأنسب لك أم لا.

بخلاف القروض الحسنة الحقيقية التي تكون دائمًا أكثر توفيرًا من سداد المبلغ بالكامل دفعة واحدة، ينبغي لك أن تكون قادرًا على حساب مقدار ما ستدفعه لرد القرض إجمالًا، ولتتمكن من ذلك، عليك أن تعرف سعر الفائدة،)انظر «معدل الفائدة السنوية المئوية»، صفحة 91) وتحسب مقدار الفائدة التي تضاف إلى تكلفة البند المقترض نفسه.

سوق المال

«فوتسي 100»، «داو جونز»، «نازداك»- كلمات ألفتها آذاننا، لكن ما القواعد الرياضياتية التي تحكمها؟

دائمًا ما نقرأ عن أرباح وخسائر كبرى في سوق الأوراق المالية (البورصة)، لكن القليل منا من يفهم تحديدًا ملابسات ذلك. هل لاحظت مثلًا أنه في الغالبية العظمى للصفقات لا يُتداول فعليًا أكثر من مجرد وعود.

المضاربون

لا يوجد كيان معين واحد يمكن وصفه بأنه «السوق»؛ بل إنه مجرد مشترين وبائعين. المدهش في الأمر أن المتداولين الذين يعملون لحسابهم في المنزل أكثر بكثير ممن يتداولون في البنوك ودور الاستثمار، وعلى الرغم من محيط التداول المعقد، فإن القواعد الرياضياتية اللازمة فعليًا هي قواعد بسيطة مباشرة.

رياضيات التداول

تُعرض أسعار الأسهم دائمًا على هيئة «نقاط» يساوي كلٌ منها 1 سنت في الولايات المتحدة الأمريكية أو 1 بنس في المملكة المتحدة. يشتري المتداولون الأسهم الصاعدة على أمل بيعها قبل هبوط قيمتها. إنهم في البداية يحسبون ما يُعرف باسم «نسبة العائد إلى المخاطرة» بتحديد أحدث القيم العليا والسفلى للسهم المعني. وذلك ما يُعرف باسم «مستوى المقاومة» و«مستوى الدعم». عندما يصعد سعر السهم، يكون العائد هو الفرق بين قيمته العليا الحديثة وسعره الحالي، بينما تكون المخاطرة هي الفرق بين سعره الحالي وقيمته السفلى الحديثة.

بفرض أن القيم عبارة عن 255 نقطة (القيمة العليا الحديثة)، و210 نقاط (القيمة السفلى الحديثة)، و225 (السعر الحالي). يكون العائد المحتمل هو 30 (255 - 225)، لكن الخسارة المحتملة هي 15 (225 - 210)، لذا فإن نسبة العائد إلى المخاطرة هي 15:30، أو 1:2. والمضاربون الحريصون لا يستثمرون إلا إن كانت النسبة لا تقل عن 1:3، وبذلك فإن هذا المثال لا يجذب بطبيعة الحال الكثير من الاستثمارات.

رياضيات الأرباح

القرار التالي الواجب اتخاذه هو كم من المال ينبغي أن أستثمر. كل عملية تداول ينبغي أن تستهلك 1% فقط من رأسمال المستثمر، حتى إذا فشلت (وفي المتوسط، تخسر النصف!) لا تكون الخسارة كارثية.

كيف يمكن أن تربح مالًا إن فشلت نصف تداولاتك؟ هل تذكر نسبة العائد إلى المخاطرة؟ إنها تعني أنك إن تمسكت بنسبة لا تقل عن 1:3، ستجد كل عملية تداول تدرّ لك ما لا يقل عن ثلاثة أضعاف الاستثمار المبدئي.

لنفترض أنك تنفذ 10 تداولات، فشلت سبعة منها ونجحت ثلاثة. إذا كان كل تداول ينفذ بقيمة 1% من صافي رأسمالك، تكون بذلك خسرت 7%، بينما أعاد كلٌ من الثلاثة تداولات الأخرى 3% من إجمالي 9%، ما يعني صافي ربح 2% من صافي رأس المال. بالطبع لا ينبغي اعتبار ذلك كنصيحة، فما من أحد يضمن الربح، لكن عندما تتجه المرة القادمة إلى أسواق المال، ستكون نظرتك لما يحدث حولك أكثر عمقًا.

صفقة جيدة – أسرع

بإمكان فتاة المبيعات أن تعرض لك أرقامًا تبدو يسيرة التكلفة، لكن كيف تقرر ما إن كانت الصفقة جيدة حقًا؟ إن حساب التكلفة الفعلية بسرعة، وإن كان بالتقريب، يمكن أن يوفر أموالك الثمينة.

عندما يُعرَض عليك نظام شهري للسداد، فعليك ببساطة أن تتخذ الخطوات التالية.

. احسب أولًا معدل الفائدة السنوية المئوية (انظر صفحة 104) على مدار سنة. وتتمثل الطريقة السهلة لحساب ذلك في: فقط أضف صفرًا إلى الرقم الشهري، لعشرة شهور، ثم أضف ضعفي الرقم الشهري، ليعطيك 12 شهرًا.

. تُعرض النسب العالية جدًا لسداد القروض على 36 شهرًا، أو 48 شهرًا، أو 60 شهرًا، أو ما يساوي 3 سنوات، و 4 سنوات، و 5 سنوات على التوالي، لذا ببساطة تضرب في 3 أو 4 أو 5 لاستنتاج التكلفة الإجمالية لقرضك.

. يبين لك طرح التكلفة الأصلية للسلع/الخدمات مقدار ما تضيفه مقابل ميزة عدم سداد المبلغ بالكامل على مرة واحدة.

وستُفاجأ بمدى استفادتك من تلك الطريقة، وسوف تتغلب في كثير من الأحيان على مقدرة فتاة المبيعات التي تنقر على آلتها الحاسبة أمامك.

لا تنس أن التفاوت البسيط في نظام السداد الشهري يمكن أن يصنع فرقًا كبيرًا في المجموع. ومؤخرًا عندما كنتُ أنا على وشك التوقيع على اتفاق قرض في معرض سيارات، لاحظت خطأً في رقم السداد الشهري. على الرغم من أن المبلغ كان أقل من 10 جنيهات؛ إذ كان من المفترض لي أن أدفع في نهاية المطاف 300 جنيه زيادةً على المبلغ المتفق عليه مبدئيًا على مدار سداد القرض. فهل يمكنك تقدير عدد شهور سداد القرض؟

الملاحة

منذ بدأ الإنسان الترحال حول العالم، ولازمنا نحن البشر احتياج لتثبيت موقعنا الحالي، ومعرفة الطريق المفترض أن نسلكه. وكانت الملاحة -سواءً بالاسترشاد بالشمس والنجوم، أو اعتمادًا على الأقمار الاصطناعية- تعتمد على الحسابات الرياضياتية.

الوسائل التقليدية

كان البحارة القدامى وغيرهم من الرحالة يستخدمون نقاطًا ثابتةً مثل النجم القطبي، أو أحد المعالم المميزة لحساب موقعهم التقريبي. اختُرعت اتجاهات الزاوية (انظر صفحة 111) لإضفاء بعض الدقة على هذه الاتجاهات باستخدام عملية تُعرف باسم «التثليث».

«إن المال مثل السماد، لا خير فيه إلا إذا انتشر.»

فرانسيس بيكون (1561 - 1626)

بعيدًا عن سطح الأرض، نجد أن الأشياء الوحيدة التي تثبت رؤيتها هي الشمس والنجوم، وهي أشياء بالطبع تتغير مواضعها على مدار اليوم والليلة. فمعرفة أن الشمس تكون في قمة ارتفاعها أثناء الظهيرة تُمكن البحارة من حساب خطّ العرض الذي هم عليه (بُعدهم عن الشمال والجنوب). غير أن عدم علمهم بخطوط الطول (موضعهم الدقيق بين المشرق والمغرب) كان من النقائص التي أعاقت حركة التجارة والاستكشاف بين المحيطات حتى أواسط القرن الثامن عشر (انظر المربع المظلل التالي). حينما عرف البحارة التوقيت بالنسبة لغرينتش، استطاعوا استنتاج الوقيت المحلي باستخدام المقاييس الفلكية، وباستنتاج الفرق بين التوقيتين، ثم ضرب هذا الرقم في 15 (نظرًا لأن كل 15° درجة شرقًا أو غربًا تمثل ساعة فرق توقيت)، صار بإمكانهم حساب خطّ الطول الدقيق.

إيجاد خط الطول

كان أساس حساب خط الطول في البحر يستند إلى معرفة التوقيت بالتحديد. غير أن ساعات البندول-التصميم القياسي الذي كان مستخدمًا في القرنين السابع عشر والثامن عشر- لم يكن من الممكن أن يظل دقيقًا أثناء التواجد على ظهر سفينة تتمايل مع الأمواج. بالإضافة إلى ذلك، كانت الظروف الجوية -مثل تغيرات درجات الحرارة- تؤثر هي الأخرى في دقة عمل تلك الساعات. حتى جاء عام 1714، حينما أعلنت الحكومة البريطانية عن مكافأة كبيرة لمن يحل تلك المشكلة التي حيرت حتى العظماء من أمثال "جاليليو" و"نيوتن". وجاء الحل أخيرًا في عام 1755 على يد صانع الساعات "جون هاريسون"؛ إذ أسفرت محاولته الرابعة عن ساعة جيب عُرفت فيما بعد باسم H4، وقد حافظت على دقة التوقيت حتى في ظل ظروف تمايل السفن؛ نظرًا لأنها لم تكن تعتمد على البندول، وكانت تشتمل على آلية لتعويض درجات الحرارة المتذبذبة.

أنظمة تحديد المواقع العالمية

على الرغم من أن وسائل القياس المتاحة أمامنا حاليًا صارت بكل تأكيد أكثر دقة وتقنية من نظائرها التي كانت بحوزة الملاحين في العصور القديمة، فإن القواعد الرياضياتية لتعيين موقع ما في أيّ مكان على وجه الأرض تظل كما هي بشكل ملحوظ.

تعتبر أنظمة تحديد المواقع العالمية (GPS) هي شيء أرقى نوعًا ما من أنظمة التثليث المعقدة التي تستخدم موقعك بالارتباط بتلك الأقمارالاصطناعية المعروفة، التي تدور حول الأرض من أجل تحديد موقعك (باستخدام نقاط ثابتة ترفع من مستوى الدقة).

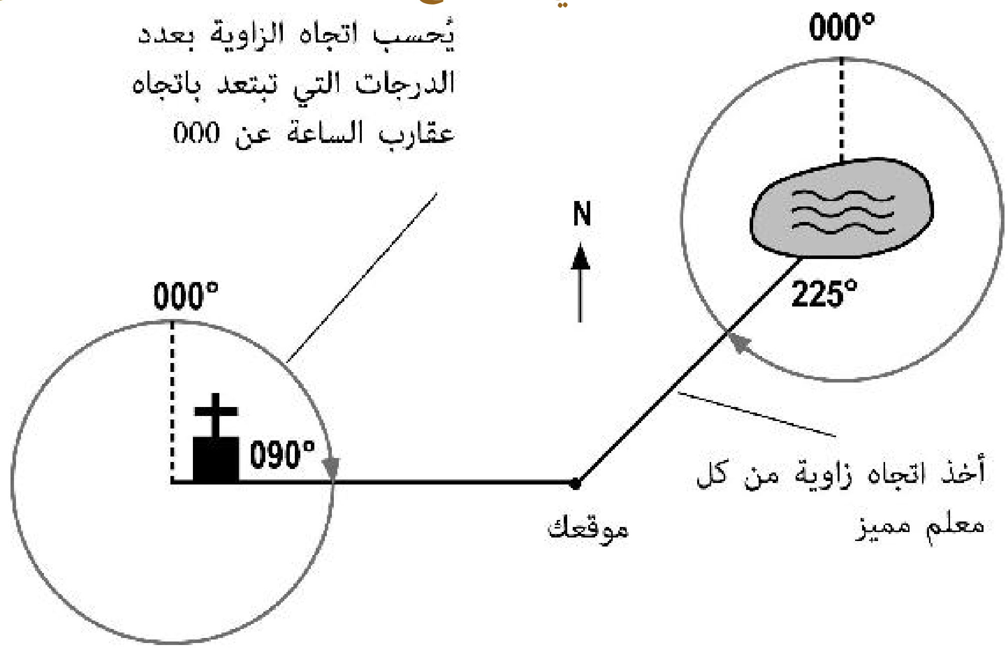
خلافًا لساعة جيب «هاريسون» (انظر المربع السابق)، بإمكان أنظمة GPS إجراء ذلك أكثر من مرة في الثانية الواحدة. حيث تشتمل الأنظمة على خرائط مضمنة بدلًا من مجرد إعطاء درجات خطوط الطول والعرض، غير أن المبادئ هي هي لا تتغير.

إيجاد اتجاهات الزاوية

يمكن تحديد أيّ موضع على الأرض عن طريق خطّي الطول والعرض المتقاطعين عنده. هذا بالإضافة إلى أن الاتجاه الذي تتجه أو تتحرك نحوه يتحدد عن طريق اتجاه زاوية يقاس بالدرجات، مثل الزوايا الواقعة داخل دائرة.

فلتتخيّل أنك تقف في مركز دائرة عملاقة مرسومة على الأرض، متجهًا صوب الشمال (أو إلى مؤشر الساعة الثانية عشرة). هذا الاتجاه يُعرف باتجاه زاوية 000 درجة (اتجاهات الزاوية تتكون دائمًا من ثلاثة أرقام). فإذا انعطفت يمينًا بزاوية 90 درجة مثلًا، يكون اتجاه الزاوية هذا هو 090°.

يمكنك أخذ اتجاهات زاوية من معالم معروفة لتحديد موقعك على الخريطة. ولنفترض أنك ترى مدرسة ناحية الغرب منك، وبحيرة ناحية الشمال الشرقي. فإذا كانت المدرسة تقع ناحية الغرب منك، فأنت بذلك تقع شرق المدرسة (اتجاه زاوية 090°)، لذا عليك أن ترسم خطًا على الخريطة على الناحية الشرقية من المدرسة. وباستخدام طريقة الاستدلال نفسها، ارسم خطًا على الناحية الجنوبية الغربية من البحيرة (225°).فالنقطة التي يتقاطع عندها الخطان ستبين موقعك.



5
الأرقام: هل يمكنك الاعتماد عليها بالفعل؟

تمثل الأرقام، على مستوى حياتنا اليومية، شيئًا ملموسًا يمكن الوثوق به، لكنها قد تبدو غامضة وغير جديرة بالثقة في بعض الاستخدامات الأخرى، التي توظّف بها. لقد أصابت المقولة الشهيرة «الأكاذيب والأكاذيب اللعينة والإحصائيات» كبد الحقيقة. ومع ذلك، لا يمكن أن ننسب هذه العيوب للأرقام، لكن الأمر يرجع إلى التفسير والسياق، فعلى سبيل المثال، «50 بالمائة» هي عبارة بلا معنى ما لم نعلم ما الشيء الذي تمثل هذه النسبة جزءًا منه. ويمكن أن يؤدي سوء فهم الإحصائيات، أو الخوف من التعامل مع الأرقام وجهًا لوجه إلى إجبارنا على الاعتقاد بلا شيء تقريبًا. يهدف هذا الفصل إلى إزالة الغمامة من على عينيك، وشرح كيف يمكن أن تتعارض حقيقة رياضياتية في بعض الأحيان مع افتراضاتك الغريزية.

الإحصائيات: هل علينا الوثوق بها؟

يميل الأشخاص إلى التعامل مع الإحصائيات بإحدى طريقتين: إما بقبول النتائج دون تشكيك، أو رفضها بسخرية. ما الخيار الأكثر صحة؟

يعتمد السلوك الأول على التجاهل، ويستند الثاني افتراضًا إلى الخوف، لكن ما نراه الأنسب من وجهة نظرنا هو العقلية التشكيكية؛ لأنها تريد أن تستكشف ما تخبرنا به الإحصائيات بالفعل.

ما الذي تخبرك به الإحصائيات بالفعل؟

تتضمن الإحصائيات غالبًا نسبًا مئوية، وخاصة نسب التغيير، كما ناقشناه في الفصل الثالث (صفحة 58)، و يمكن أن يعطي صورة مربكة. كثيرًا ما يستشهد بالأرقام مع الافتقار إلى الدقة، بسبب الكسل، أو سوء الفهم. إذ يمكن أن تكون قد قرأت في الصحافة، على سبيل المثال، أن تناول مشروب كحولي واحد إضافي يوميًا يزيد من خطر إصابة المرأة بسرطان الثدي بنسبة 6%. وقد يكون هذا التهديد كفيلًا بأن تمتنع العديد من النساء عن هذه المشروبات نهائيًا، لكن مع قليل من البحث، نجد أنه من المستبعد جدًا أن تصاب السيدات بسرطان الثدي بسبب هذا المشروب الإضافي. ففي الواقع، تصاب نسبة 9% من السيدات بسرطان الثدي مع بلوغ سن 80 عامًا، ونسبة 6% من 9% ما هي إلا أقل من 0.5% (0.06 × 0.09 = 0.0045 أو 0.45%).

يصعب تخيّل النسب الأولية حتى وإن كانت دقيقة، لذا يُعدّ من الأفضل أن نترجمها إلى عدد الأشخاص من كل مائة، أو كل ألف. ففي المثال السابق، تعتبر نسبة 0.5% أسهل في الاستيعاب إذا ما حولناها إلى نسبة امرأة واحدة من كل 200. فإذا ما عبّرنا عن الإحصائية نفسها بعبارة أكثر وضوحًا (وأقل ترهيبًا)، تكون كالتالي: «عادةً ما تصاب 18 سيدة من كل 200 (9 من كل 100) بسرطان الثدي مع بلوغ سن 80 عامًا.

الإجازات

ماذا يخطر ببالك عندما تقرأ هذا العنوان؟

نسبة 40% من الإجازات المرضية للموظفين تكون في أيام الإثنين والجمعة.

رد الفعل الفوري الأكثر شيوعًا هو الإيماء بالرأس كأنك على معرفة مسبقة بهذه الحقيقة والتفكير قائلًا: نعم، أيام الإثنين والجمعة هي أكثر الأيام التي تجذب الموظفين ليدّعوا المرض حتى يستمتعوا بعطلة نهاية أسبوع طويلة.

والآن، ترجم هذه الحقيقة إلى عملية حسابية. إذا ادعى العدد نفسه من الأشخاص بالضبط المرض في كل يوم من أيام أسبوع العمل الخمسة، فما نسبة الأشخاص المتغيبين عن العمل أيام الإثنين؟ وما نسبتهم أيام الجمعة؟ ربما تكون هذه الإحصائية البالغة 40% صادمة لك؛ لأنها توضح عدم وجود اتجاه نحو تفضيل أيام الإثنين والجمعة!

وإذا ما تناولت السيدات كأسًا إضافيًا من المشروبات الكحولية يوميًا، قد ترتفع الإحصائية لتكون 19 سيدة من كل 200». توخّ الحذر دائمًا إلى ما تعنيه الإحصائيات بالفعل، واسأل نفسك: س بالمائة من ماذا؟

المسببات والعلاقة السببية؟

من الأخطاء الشائعة الأخرى افتراض أنه إذا زاد «أ»، متبوعًا بزيادة مماثلة في «ب»، فإن «أ» يجب أن يكون السبب في «ب». ومع وجود العديد من الأمثلة التي يكون فيها «أ» و«ب» مرتبطين، من السهل جدًا أن نقع في فخ الاعتقاد بأن هذا ما يحدث دائمًا. هناك مثال طريف معروف في إسكندنافيا، فقد وجد الباحثون أنه كلما زادت أعداد اللقالق التي تُصطاد على سطح منزل العائلة، كان أولادك أكثر عددًا. فليس هناك دليل على أن اللقالق سبب في وجود الأطفال أو العكس. لكن مع القليل من التفكير،

نجد أنه كلما كان أولادك أكثر عددًا، من المحتمل أن يكون منزلك أكبر مساحة، ويكون السطح الذي يعلوه أكثر اتساعًا ليجذب عددًا أكبر من اللقالق. إن ذلك أشبه بمقولة إن درجات الحرارة على مستوى العالم مرتبطة ارتباطًا مباشرًا بعدد المتشبهين بشخصية «إلفيس»، لأن الاثنين زادا بنسبة كبيرة في العقود الأخيرة. والخلاصة، أنه من السهل جدًا أن يُساء استخدام الأرقام المقدّمة إليك.

أساليب جمع البيانات

عادةً ما يستخدم الإحصائيون عينات صغيرة جدًا بشكل مدهش. فعلى الرغم من أن ذلك غير منطقي، فهناك قاعدة عامة صحيحة تقول إنه كلما زاد عدد السكان المأخوذ منه العينة، قلّت النسبة المئوية المطلوبة للحصول على نتيجة دقيقة.

العشوائية الحقيقية

أحد المفاهيم الشائعة للعشوائية التوزيع على نطاق واسع أو الاختيار الذي لا يُبدي أيّ أفضلية لمنطقة، أو نوع على آخر. إذ يجب ألا يستبعد الاختيار العشوائي لعينة المشاركين من الولايات الأمريكية أيّ شخص في المنطقة الغربية بجبال روكي، وكذلك المجموعة العشوائية من الملابس يجب ألا تكون كلها من الجوارب. قد يوازن لاعبو اليانصيب في انتقائهم للأرقام عشوائيًا باختيار مجموعة متنوعة جدًا بدلًا من مجرد مجموعة من أرقام مجاورة. وبذلك، فإن العشوائية مختلفة تمامًا عن التوزيع المتساوي. تخيّل بعثرة كمية من الأرز على أرضية مكسوة ببلاط مربع الشكل. ستكون هناك بعض البلاطات مغطاة بكميات كبيرة من الأرز وبعضها عليه كميات صغيرة جدًا. ويوضِّح هذا المفهوم الخاطئ لطبيعة العشوائية حالات الذعر الناتجة عن بعض الإحصائيات، مثل «تجمعات المصابين بالسرطان» الواضحة: وهي الأماكن التي تزيد بها حالات الإصابة بالسرطان بنسبة كبيرة عن المتوسط. وما يدعو إلى الطمأنينة، في الواقع، هو أن معظم المجموعات عبارة عن نتائج رياضياتية عشوائية، وليست انعكاسًا لتمركزات مخاطر حقيقية.

على سبيل المثال، توفر عينة مكونة من 500 شخص نتيجة صحيحة لتعداد سكاني يبلغ 5 ملايين نسمة، مثلها مثل عينة تضم مليون شخص، وذلك شريطة أن تكون العينة عشوائية بقدر الإمكان.

مع ذلك، لا يعتبر الإحصائيون حتى الإحصاء علمًا دقيقًا؛ إذ تُنشر الأرقام مع ما يطلق عليه اسم هامش خطأ، وهو مؤشر على مدى موثوقية الإحصائيات. وهناك ميزة للعيّنات الأكبر، فهي قد تعطي ثقة أكبر للإحصائيين عند الإعلان عن النتائج التي توصلوا إليها (أي مدى ثقتهم في أن نتائج التعداد السكاني بالكامل تعكس ما اكتشف في حالة العينة) وتقلل من هامش الخطأ.

هوامش الخطأ

إذا أعلن أحد استطلاعات الرأي، مثلًا، أن هناك هامش خطأ بنسبة 4%، فيعني ذلك أن مع كل 25 مرة تقوم فيها بدراسة استقصائية،

تحصل على نتيجة زائفة تمامًا، وهناك احتمال بنسبة 4% أن هذه النتيجة هي التي أنت بصددها الآن.

تُعدّ هوامش الخطأ مهمة عند تحديد ما تعنيه النتائج. لنفترض أن نتيجة تقييم شعبية إحدى السياسيّات هي 46% في استطلاع للرأي و48% عند تكرار الاستطلاع بعد مرورأسبوع. فلا يعني ذلك بالضرورة ارتفاع تقييمها. إذا كان هامش الخطأ في استطلاعي الرأي هو 3%، افتراضًا، فإنه ينبغي قراءة النتيجة الأولى على أنها «تتراوح بين 43% و49%»، وهو النطاق نفسه الذي تقع فيه النتيجة الثانية أيضًا.

إذًا، هل يمكننا الوثوق بالإحصائيات دائمًا؟

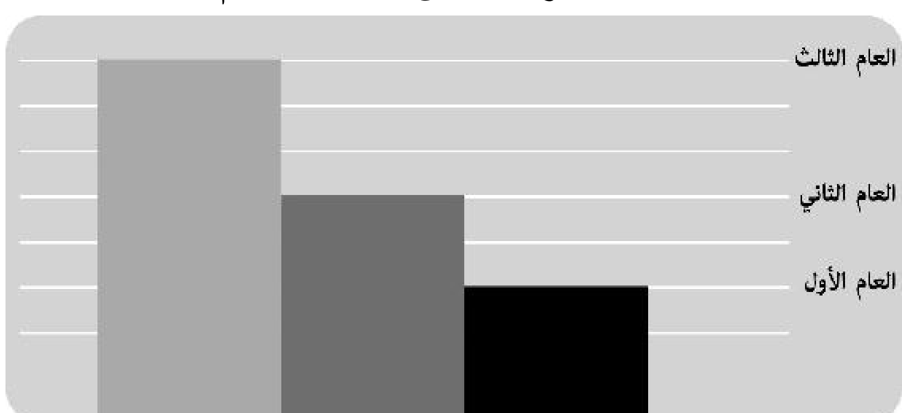
بالتأكيد، لكن بشرط ألا نأخذها على محمل الجد مطلقًا، وأن نطرح على أنفسنا دائمًا الأسئلة المناسبة. فعندما تطّلع على نسبة مئوية ما، اسأل نفسك دائمًا ما الذي تمثل هذه النسبة المئوية جزءًا منه، وما معايير القياس، وما قد يكون حجم العينة وهامش الخطأ، وما إذا كانت هناك أيّ عوامل مؤثرة أخرى. فبهذه الطريقة، ستكون قادرًا على تقييم مدى صحة ما تقرؤه بكل ثقة.

النطاق هو الأهم

تُعرض الأرقام، وخاصة المقارنات مثل: إحصائيات المبيعات أو كيفية تخصيص الميزانيات واستخدامها، في أشكال بيانية عادةً، ويمكن أن تكون المخططات التوضيحية الدائرية، والرسوم البيانية، والمدرجات التكرارية جميعها وسائل مفيدة لتحويل هذه الأرقام إلى أشكال أخرى؛ لتكون مفهومة بشكل أكبر،لكنها تتيح فرصًا رائعة للتضليل كذلك.

قراءة الرسوم البيانية

عندما نواجه احتمالية تقديم إحصائيات أسوأ مما هو متوقع، يميل كل من الأشخاص والشركات وحتى الحكومات في الأغلب إلى إضافة «لمسة» إيجابية قدر الإمكان على الأرقام الفعلية. تأمَّل الرسم البياني التالي الذي أعده السيد «ودجيت». يبدو أن أداء شركته المصنِّعة كان رائعًا على مدار العامين الماضيين، فللوهلة الأولى، يبدو أن حجم المبيعات زاد أكثر من الضعف.

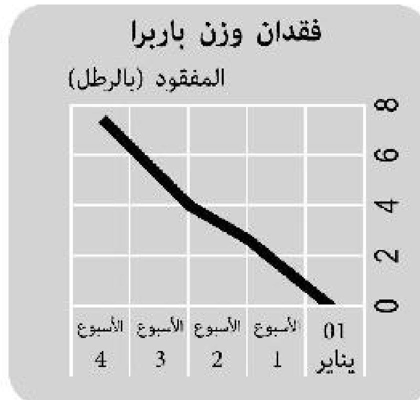


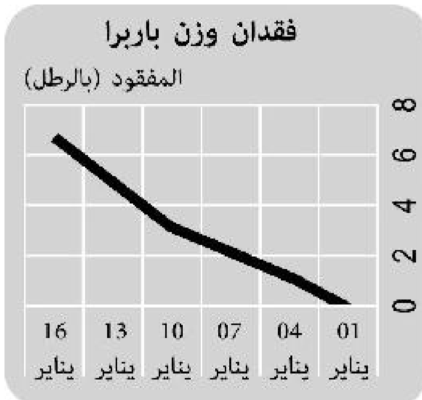
لكن الأمر المفقود بكل بساطة هو العلامات المهمة للغاية على المحور الرأسي. فبدلًا من البدء من الصفر (التصرف النزيه المفترض القيام به)، عرض السيد «ودجيت» رسمًا بيانيًا بالزيادة في المبيعات فقط. إذا كان كل خط أفقي بالرسم البياني يمثل افتراضًا 100 عملية بيع، وارتفعت مبيعاته في العام الأول إلى 5000 سلعة، فإن المبيعات في العام الثالث (5500 سلعة) قد حققت بالفعل زيادة بنسبة 10% فقط مقارنة بالعام الأول.

من السهل التلاعب في الرسومات البيانية، لذا ينبغي دائمًا التحقق من خطوط الأساس والمعلومات الفعلية المقدّمة، وليس فقط التأثير المفتعل. يمكن التلاعب بالرسوم البيانية البسيطة بهدف المبالغة في التغييرات النسبية، أو التقليل منها. وبالمثل، تعطي المخططات التوضيحية الدائرية دائمًا انطباعًا بتوضيح القصة كاملة، لكنها قد تمثل جزءًا منها فقط.

انظر إلى الرسمين البيانيين التاليين اللذين يوضحان محاولات كل من «أنابيل» و«باربرا» لفقدان الوزن في العام الجديد. من يعطي الانطباع بتحقيق الأداء الأفضل؟ نجد أن الرسم البياني لأداء «أنابيل» أكثر انحدارًا بالتأكيد، مما يوحى بإحراز تقدم أسرع، لكن انظر عن كثب إلى المحاور الأفقية:

ما مدى اختلاف الصورة عندما نظرت إلى ما وراء مظهريهما والتركيز على الأرقام الفعلية؟
كم فقدت الاثنتان من وزنيهما بحلول 15 يناير، على سبيل المثال؟





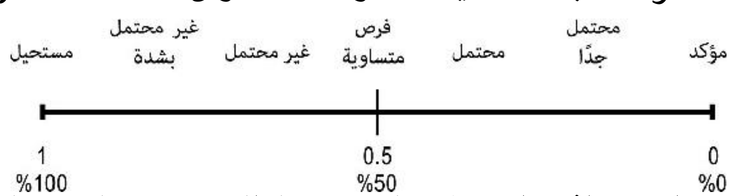
الفرص والاحتمالات

لا تُحدَّد الاحتمالية أرجحية ربح أحد الخيول في أحد السباقات، أو فرصة فوزك باليانصيب فحسب، لكن التطبيقات العملية البسيطة أيضًا، مثل مبلغ التأمين الذي تدفعه، أو مدى خطورة إصابتك بأمراض، أو تعرضك لحوادث معينة.

سلسلة الاحتمالات

الاحتمالية هي أحد أكثر المجالات التي يُساء فهمها في علم الرياضيات بأكمله: فقوانينها تُعدّ أقل وضوحًا على أفضل تقدير، وأبعد ما تكون عن الأمور البديهية في أسوأ تقدير.

تخيّل خطًا أفقيًا مدونًا عليه الرقم 0 في الجانب الأيسر والرقم 1 على الجانب الأيمن. يمكننا تسجيل كل الأحداث المستقبلية في مكان ما على طول هذا الخطّ وفقًا للمبدأ التالي. إذا كان من غير الممكن حدوث شيء ما، فنسبة احتماليته هي 0، أو 0%، وأيّ شيء من المؤكد أنه سيحدث ستكون نسبة احتماليته 1، أو 100%. وكل الأحداث الأخرى تقع في مكان ما بين الاثنين.



والشيء الذي لديه فرصة متساوية للحدوث (على سبيل المثال: رمي قطعة نقود للحصول على «الصورة») تكون نسبة الاحتمالية 0.5، أو 50%. ونجد أن خبير الأرصاد الجوية الذي يتنبأ بفرصة سقوط أمطار بنسبة 50% يعني فعليًا بذلك تساوي احتمالات سقوط أمطار من عدمه– وهذا لا يفيد بدرجة كبيرة! ومن الأخطاء الشائعة التي يقع بها الأشخاص هو عندما يجدون أن 1 من 10 مساوٍ لنسبة 10%، يعتقدون مثلًا أن 1 من 20 مساوٍ لنسبة 20% بالتأكيد، لكنها 5% فعليًا (لأن 1 من 20 تعني 5 من 100).

طريقة حساب الاحتمالات

تُحسب احتمالية وقوع حدث ما عن طريق قسمة عدد المرات التي قد يقع فيها هذا الحدث على إجمالي عدد النتائج المحتملة. ويبدو هذا الأمر أكثر تعقيدًا مما هو عليه بالفعل. لنفترض أنك تريد معرفة احتمالية رمي حجر النرد؛ لتحصل على رقم أكبر من 4.

- كم عدد المرات التي يحتمل أن يحدث ذلك: 2 (قد يُظهر حجر النرد الرقم 5 أو 6).

- كم عدد النتائج المحتملة إجمالًا: 6 (قد يُظهر حجر النرد الرقم 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6).

بذلك، فإن احتمالية الحصول على رقم أعلى من 4 هو 2 ÷ 6، أو 2/6. وهذا مساوٍ للنتيجة 1/3، وعليه، يمكن أن نفترض أننا سنحصل على رقم 5 أو 6 مرة كل ثلاث مرات تقريبًا.

لماذا تقريبًا؟ هناك فرق كبير بين الاحتمال النظري والنتائج المحسوبة. فكلما قمت بمحاولات أكثر للقيام بعمل ما، زاد قُرب النتائج التي ستحرزها من الاحتمال النظري. فإذا رميت حجر النرد بعدد لانهائي من المرات (وهو أمر مستحيل تمامًا في الواقع)، فستجد أنك ستحصل على الرقم 5 أو 6 مرة كل ثلاث مرات بالضبط – فالحياة تعكس الأمور النظرية بدقة، لكنك إذا ألقيت حجر النرد مئات المرات فقط، أو حتى آلاف المرات، فإن أفضل ما قد تقوله إن فرص الحصول على الرقم 5 أو 6 تبلغ ثُلث محاولاتك. وهذا عنصر الحظّ الذي تنبني عليه المراهنات (بما في ذلك التداول في البورصة). ولهذا السبب تُعدّ السجلات السابقة، سواء أكانت نموذج سباق لأحد الخيول، أم نسب ارتفاع أسهم شركة ما، وانخفاضها أمرًا مهمًا في محاولة التنبؤ بالأداء، أو النتائج بأكبر قدر ممكن من الدقة، لكن ليس هناك ضمان بما قد يحدث في المستقبل.

تؤثر قوانين الاحتمالية في حياتنا اليومية أكثر مما قد نتوقع. فهي تحدّد مثلًا تكاليف التأمين. يعمل خبراء حسابات التأمينات على معرفة مدى احتمالية تعرّض سيارتك لحادث، أو منزلك للسرقة من خلال حساب فرص وقوع بعض الأحداث، وهي نفسها قاعدة التنبؤ بفرص رمي حجر النرد على رقم معين، لكن مع مزيد من المتغيرات.وستتحدَّد قيمة قسط سيارتك وفقًا لبعض المعايير، مثل: السنّ ونوع السيارة ومكان إقامتك، علاوة على المساواة بين فرص خسارة شركة التأمين لأعمالها إذا كان السعر المعروض لتغطية التأمين مرتفعًا للغاية، وإفلاس الشركة إذا كان السعر أقل بكثير من أن يغطي الخسائر من خلال التعويضات.

لغز تاريخ الميلاد المشترك (الحلول في صفحة 153)

إن فرص وقوع أحداث معينة تكون عادةً مختلفة تمامًا عما يمليه عليك حدسك. فمن أشهر ألغاز الاحتمالات ما عُرف باسم «مسألة مونتي هول» (انظر صفحة 126)، لكن إليك سؤال أكثر وضوحًا عن الفرص: كم عدد الأشخاص الذين يجب أن يُوجدوا في غرفة ما ليكون من المرجّح (أي يكون هناك احتمالية بنسبة تزيد عن 50%) أن يكون لاثنين منهم على الأقل تاريخ الميلاد نفسه؟ 100؟ 500؟ الإجابة هي 23 فقط، وهو أمر لا يصدّق. كيف يكون هذا؟

- إن احتمالية أن تتشارك أنت وأنا في تاريخ الميلاد نفسه هي 1 من 365. وبذلك فإن احتمالية أن يكون تاريخ ميلادي غير متوافق مع تاريخ ميلادك هي 365/364، أو حوالي 99.7%.
- احتمالية أن يكون تاريخ ميلاد شخص ثالث في يوم آخر من الـ 363 يومًا المتبقية هي 365/363.
- فرصة أن يكون تاريخ ميلاد شخص رابع في يوم آخر غير تواريخ ميلاد الآخرين هي 365/362(حوالي 99.2%).
- بالاستمرار على هذا المنوال، نجد أن الشخص رقم 23 لديه فرصة بنسبة 365/346(حوالي 93.7%) ليكون تاريخ ميلاده مختلفًا عن تواريخ ميلاد الآخرين.

لحساب احتمالية حدوث شيئين معًا، نحتاج إلى ضرب احتمالات حدوثهما كل على حدة. على سبيل المثال: احتمالية رمي عملة نقود والحصول على «صورة» لثلاث مرات متتالية هي $\frac{1}{8}$ ($\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$)، أو 12.5%.

فإذا ضربت احتمالات تواريخ الميلاد: 365/364 × 365/363 × 365/362 وهكذا، عندما تصل إلى المرة التي تكون فيها الاحتمالية 365/346 (اللشخص رقم 23)، فأنت بذلك تصل إلى إجابة بنسبة 49.3%. ونظرًا لأنها أقل من النصف، فأنت وصلت بذلك إلى نقطة التحوّل، التي تزداد عندها احتمالية أن يكون لشخصين ضمن مجموعة تاريخ الميلاد نفسه بنسبة طفيفة عن عدم احتمالية ذلك.

والسبب في عدم فهم ذلك على نطاق واسع هو أن معظم الأشخاص عندما يواجهون هذه المسألة، فإنهم يحرّفونها في عقولهم لتكون: «كم عدد الأشخاص الذين يجب أن يُوجدوا في

غرفة ما ليكون من المرجّح أن يكون لواحد منهم نفس تاريخ ميلادي؟» إنه ليس السؤال ذاته على الإطلاق، لكن هل يمكنك حله؟

وإذا كان تاريخ ميلادك موافقًا ليوم 1 يوليو، فإنك تشاركني تاريخ الميلاد نفسه فما فرص حدوث ذلك؟

مسألة مونتي هول

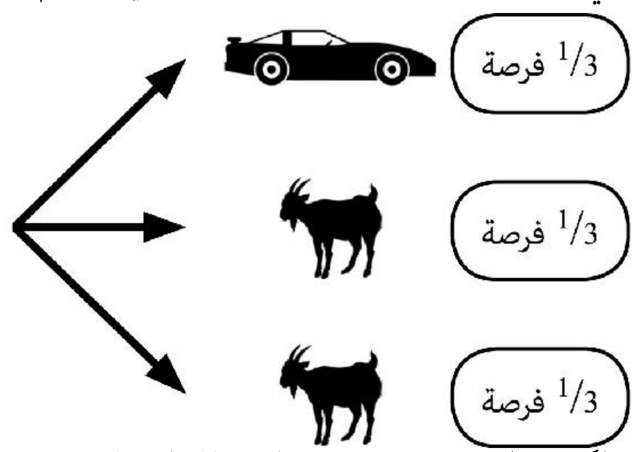
سُمِّيت هذه المسألة الإحصائية الشهيرة نسبةً إلى مقدّم برنامج الألعاب الأمريكي، وقد حيّرت بالفعل بعض العقول النابغة.

لنفترض أنك مشارك في أحد برامج الألعاب وعليك تخمين أيٍّ من الأبواب الثلاثة التي توجد الجائزة الكبرى خلفه: وهي سيارة. بينما يوجد ماعز خلف كلٍ من البابين الآخرين. تقوم عندئذٍ بالإشارة إلى أحد هذه الأبواب، ثم يفتح مقدم البرنامج (الذي يعرف مكان السيارة) بابًا آخر غير الذي اخترته ليريك الماعز الذي خلفه. تتاح لك الفرصة حينها للتمسّك باختيارك الأصلي، أو العدول عنه واختيار الباب المغلق الآخر. هل تغيير الباب يكون في صالحك؟

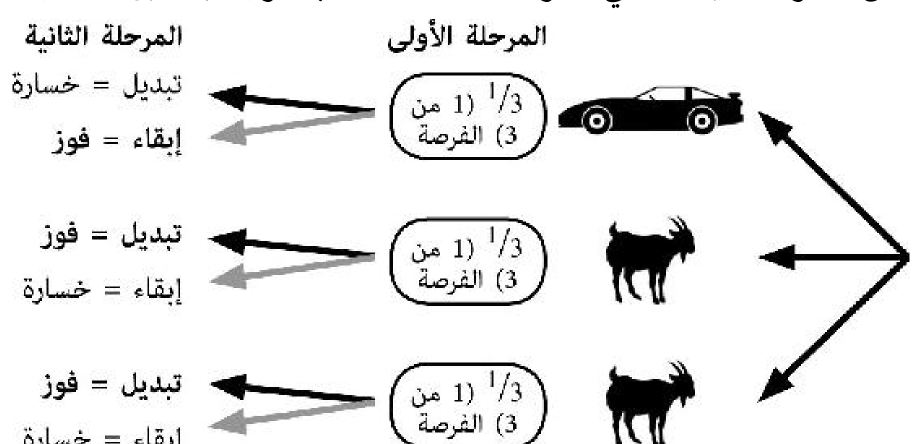
الإجابة البديهية هي أن التمسك باختيارك، أو تغييره لا يُحدث أيّ فارق. مع ذلك، يوجد أمامك الآن بابان مغلقان أحدهما يخفي ماعزًا وراءه، والآخر وراءه سيارة.

يجب أن تكون الاحتمالية بالتأكيد 50:50، أو متساوية. والمدهش، هو أنه يجب عليك تبديل الاختيار؛لأن احتمالية فوزك ستزيد إلى الضعف.

في البداية، تتوفر أمامك فرص متساوية للقيام بأيٍ من الاختيارات الثلاثة:



لكن انظر ماذا يحدث في المرحلة الثانية، حسب قرارك بتبديل اختيارك، أو الإبقاء عليه:



كما ترى، إذا بدّلت اختيارك من الماعز فستربح، بينما إذا بدّلت اختيارك من السيارة فستخسر، ونظرًا لأنك تختار الماعز بمعدّل مرتين من كل ثلاث محاولات في المتوسط، فإن تبديل الاختيار

يوصلك إلى الفوز ثلثي الوقت.

يمكنك تجربة ذلك بنفسك باستخدام ثلاث أوراق لعب، والاستعانة بصديق. استخدم ورقة A كبديل للسيارة، وورقتي جوكر بدلًا من الماعز. وزّع الورق أمامك بحيث يمكنك رؤية أوجه الورق، واطلب من صديقك الإشارة إلى إحدى الورقات. اكشف عن إحدى ورقتي الجوكر التي لم يخترها. واسأله إن كان يريد تغيير رأيه والعدول عن اختياره للورقة الأصلية. اكشف عن الورقة التي اختارها أخيرًا، واكتب ملاحظة بما إذا كان قد فاز أو خسر. ستكتشف، إذا لعبت لعدد مرات كافٍ، أنه سيفوز عند تغيير اختياره بمعدل الضعف تقريبًا مقارنة بعدد المرات التي لم يغيّر فيها رأيه.

ما احتمالات المراهنات؟

يُمثّل علم الرياضيات جوهر كل احتمالات الرهان، لكن هل فهم الفرص المتاحة أمامك بشكل أفضل يمكن أن يمنحك الأفضلية، أو أن كل شيء مرجعه في النهاية إلى عامل الحظ؟

هل اليانصيب مجرد عبء على علماء الرياضيات لا علاقة لهم به؟

موازنة الاحتمالات

تعتمد المراهنات وألعاب الحظ بالكامل على الموازنة بين الاحتمالات. فعند اللعب على طاولة الروليت، تتم المراهنة بمبالغ كبيرة على رقم بعينه، لكن فرص استقرار الكرة على هذا الرقم تُعدّ منخفضة (36/1، أو 38/1 في بعض العجلات). ويحمل اختيار الرهان على أرقام فردية أو زوجية بسيطة فرصة كبيرة (2/1) للفوز، لكن يكون المبلغ صغيرًا. يستخدم وكلاء المراهنات مبدأ الموازنة نفسه عند وضع الاحتمالات على أحد سباقات الخيل، لكن يمكنك زيادة فرصك في اختيار الجواد الفائز إذا كنت تعرف شيئًا ما عن النتائج السابقة للخيول.

على الرغم من أن بعض أشكال المراهنات يمكن أن يتأثر بالمهارة والخبرة، تكون أشكالها الأخرى قائمة على محض الحظ. من أنواع المراهنات الشائعة التي يستمتع بها العديد من الأشخاص الذين لا يعتبرون أنفسهم مقامرين قطّ، تدخل ضمن الفئة الثانية: وهي اليانصيب. نظرًا لتوفر عنصر الحظ في اليانصيب وشعبيته الكبيرة، من المفيد الغوص في بحر علم الرياضيات.

اليانصيب – هل هو مجرد يانصيب؟

كل أنواع اليانصيب متماثلة إلى حدٍّ كبير: فأنت تدفع مالًا لاختيار مجموعة من الأرقام، وتفوز عندما تتطابق أرقامك مع أيّ أرقام من مجموعة الأرقام الرسمية التي تُسحب عشوائيًا أو كلها. في اليانصيب البريطاني(يُجرى اليانصيب في الولايات الأمريكية على المنوال نفسه)، يعني اختيار 49 رقمًا أن هناك 13,983,816 توليفة أرقام محتملة الفوز بالقدر نفسه. وبذلك فإن فرصفوز توليفة أرقامك هي 1 من 14 مليون تقريبًا، لذا ليس هناك مجال للاحتمالات في ذلك.

مهما يقُل لك حدسك، فليس بوسعك القيام بأيّ شيء حتى تزيد من فرصك في الفوز.لكن يمكنك زيادة قيمة جائزتك إلى أقصى حدّ، في حالة ما إذا أصبحت من الفائزين. يكمن الحل في حقيقة أن تقسيم الجائزة الكبرى بين كل شخص لديه توليفة الأرقام الرابحة. تخيّل فوزك بالجائزة الكبرى، ثم تكتشف أنك ستتقاسمها مع 5000 شخص آخر. هنا يأتي دور الحيلة، وهو اختيار الأرقام التي يتشارك فيها أقل عدد ممكن من الأشخاص، حتى تحصل على أكبر قدر ممكن من المال في حالة فوزك.

اختر رقمًا، أيّ رقم

يميل الأشخاص إلى تكوين ارتباطات غير منطقية ببعض الأرقام، أو المجموعات المعينة، مثل التواريخ المهمة، أو متتاليات «خاصة» (يختار عدة آلاف أسبوعيًا أرقام 1، 2، 3، 4، 5، 6). لكي تقلل من عدد مَنْ قد يقاسمونك في الجائزة، ضمِّن على الأقل بعض الأرقام التي تزيد عن 31، وتجنّب تكوين أنماط واضحة، وتطلّع إلى الاختيار العشوائي. ومع ذلك، تذكّر أن اختيار أرقام قد تبدو موزعة بشكل متساوٍ على التذكرة ليس مماثلًا لاختيار الأرقام عشوائيًا، إذ إن «الاختيار العشوائي» هو بمثابة «تناقض لفظي» بالفعل عند التحدث من الناحية الرياضياتية (انظر صفحة 117).

«الثروة خير حليف للأشخاص أصحاب الحكم الصائب.»
يوربيديس (حوالي 480–406 ق.م.)

6
عجائب الأرقام

ننظر إلى الأرقام في أحيان كثيرة وكأنها جنود مجندة لإنهاء أعمالنا اليومية، فنستعين بها في القيام بالحسابات المملة عادةً، ونحن مضطرون لإنجازها، لكنها ليست كذلك، فالأرقام لها حياتها الخاصة: فهي ترتبط ببعضها بطريقة مذهلة، مشكّلةً بذلك عددًا من أروع الأنماط الطبيعية.

تتميز بعض الأرقام، أو الروابط فيما بينها، ببعض الخصائص التي أبهرت علماء الرياضيات منذ زمن بعيد. فعوالم الرياضيات لا تتضمن فقط «أرقامًا حقيقية»، الأرقام التي نعرفها جميعًا، لكنها تضم أيضًا أرقامًا غير حقيقية وأرقامًا غير منطقية وحتى أرقامًا خيالية. كما أن القواعد التي يتم بها تكوين الأعداد قد تقدم لنا مفتاحًا لكشف أسرار الكون في المستقبل.

الصفر: شيء ولاشيء

انقسمت آراء الفلاسفة بين ما إذا كان «اللاشيء» له وجود بالفعل أم لا، لكن لم يواجه علماء الرياضيات أيّ شك في ذلك. فالرقم صفر مهم للغاية، واكتشافه ساعد على التقدم بخطى سريعة في عدة نواحٍ من الفكر الرياضياتي.

ما قبل الصفر

قبل أن نذكر أهمية الصفر ونشيد بها، ينبغي أولًا معرفة مدى صعوبة العمليات الحسابية قبل اكتشاف الصفر. عند كتابة أعداد مكونة من أكثر من «خانة» واحدة (انظر صفحة 84)، فإن العدد 3، على سبيل المثال، قد يعني 3 أو 30 أو ربما 300 في النظام العشري (رقمه الأساس هو 10)، بينما كان الأمر أكثر تعقيدًا مع أرقام الأساس الأخرى. وللتغلب على هذه المعضلة، استخدم البابليون القدماء علامتين مائلتين للإشارة إلى موضع أيّ «خانة» فارغة وسط أيّ عدد: ⁄⁄ وتُعرف هذه العلامة باسم عنصر نائب، ويظل ذلك من الوظائف المهمة للصفر في وقتنا الحالي.

الصفر ينضمّ إلى مصافّ الأرقام

كانوا في الماضي يعتبرون «اللاشيء» هو مجرد «غياب لكل شيء»، إلى أن توصّل عالم رياضيات هندي(وليس العرب ولا البابليون، على عكس المعتقدات الخاطئة الشائعة) في القرن السابع الميلادي تقريبًا إلى أن الصفر يعتبر رقمًا في حدّ ذاته، ويستحق أن يُوضع على خط الأعداد، ويُعامل كذلك على أنه عدد (بطريقة دون أخرى). واتخذ الصفر شكل الرمز 0، وانتشر ذلك بين التجار العرب، وقد عُرف بعدها أنه من اكتشافهم. لكن الحقيقة أن الهنود والعرب والبابليين وحتى الإغريق اشتركوا جميعًا في وضع ما أصبح فكرة رياضياتية رئيسية.

لسبب غير مفهوم، تغافل الجميع عن استخدام الرمز 0 في الزمن القديم، حتى بين علماء الرياضيات، ولم يُعَد استخدامه مرة أخرى إلا في القرن السابع عشر، أي بعد مرور ألف عام تقريبًا.

كيف ساعد الصفر علماء الرياضيات؟

بصرف النظر عن فائدته كعنصر نائب، حينما أدرك علماء الرياضيات أن الصفر هو عدد حقيقي، أصبح عنصرًا رئيسيًا في الأنظمة الجبرية لحل المعادلات الأكثر تعقيدًا. ولأن جمع الصفر وطرحه لا يغير من قيمة أيّ رقم آخر، أصبح من الممكن لعلماء الرياضيات أن يتعاملوا مع العبارات بسهولة أكبر، وحلّ الافتراضيات غير القابلة للإثبات حتى يومنا هذا. كما ساعد فهمنا للصفر على تطوير فكرنا فيما يتعلق باللانهاية. الحدود، وهذا يعد بدوره أمرًا أساسيًا في تطوير حساب التفاضل والتكامل، أحد أقوى المفاهيم الرياضياتية في الألفية الثانية.

قصة الرقم صفر

يرجع أصل كلمة «zero» إلى كلمة «sunya» باللغة السنسكريتية التي تعني «فارغ» أو «لا شيء». ثم اكتسب الرقم اسمه تدريجيًا عندما تداوله الأشخاص عبر الطرق التجارية في آسيا وأوروبا. وأطلق عليه العرب اسم «صفر» (الذي نشتق منه في الغرب كلمة «سايفر» أو «شفرة»، التي تعني نوعًا من الرموز السرية). دخل الصفر العربي اللغة اللاتينية تحت مسمى «zephirum» وأصبح «zefiro» بالإيطالية بعد ذلك، بينما غيّر أهل البندقية في القرون الوسطى من هذا الاسم واختصروه ليصبح «zero».

الأداء الغريب للصفر

من الواضح أن جمع الصفر، أو طرحه لا يغيّر من أيّ نتيجة:
6 + 0 = 6، و 1546 – 0 = 1546. لكن ماذا عن الضرب والقسمة؟

ينخدع الأشخاص عادةً عند الضرب في الصفر، لكن هناك أيضًا مفهومًا يمكن استيعابه بسهولة: 8 × 0 = 0، لأن ثماني مجموعات من لا شيء تظل لا شيء كما هي، بينما تشكّل القسمة تحديًا أكثر تشويقًا.

لأن القسمة على الصفر حاليًا لا تعني أيّ شيء. وأقول «حاليًا» لأنه من الممكن في المستقبل أن يكتشف بعض علماء الرياضيات النابغين طريقة جديدة للتفكير في هذا المفهوم، لكن في وقتنا الحالي،
لتسأل نفسك:

كم مرة يشكّل الصفر الرقم 8؟ بالتأكيد ليس 0 من المرات، إذ إن 0 × 0 = 0، لكن ليست الإجابة 8 أيضًا، ولا توجد إجابة أخرى تعطي أيّ معنى أكثر منطقية.

إذا أتيح لنا القسمة على الصفر، فقد نثبت أمورًا سخيفة.
ومثال ذلك:

4 × 0 = 5 × 0

هذه العبارة الرياضياتية صحيحة، لأن كلًا من طرفي المعادلة يساوي صفرًا، لكن قسمة طرفي المعادلة كليهما على الصفر قد يوصّلنا إلى النتيجة 4 = 5 وهذا تناقض مستحيل.

كان الحل الذي خرج به علماء الرياضيات؛ لحل هذه المشكلة تعريف عملية القسمة على الصفر ببساطة على أنها بلا معنى أو مستحيلة.

إذا أخبرتك النشرة الجوية أنه من المتوقع أن تصل درجة البرودة إلى ضعفي ما هي عليه اليوم، وهي التي تبلغ اليوم 0 درجة مئوية، فماذا ستكون درجة حرارة الغد فعليًا؟ (الحل في صفحة 154)

الأعداد الأولية

تتميز جميع الأرقام بخصائص معينة. على سبيل المثال، الأعداد الصحيحة كلها لها عوامل، ويمكن قسمة الأعداد عليها دون باقي قسمة. والأعداد التي لها عاملان (الأعداد نفسها ورقم 1) معروفة باسم الأعداد الأولية، وقد كانت مصدر إبهار لعلماء الرياضيات لعدة قرون.

غربال إراتوستينس

حتى الإغريق قديمًا كانوا على علم بالأعداد الأولية، فقد قدّم عالم الرياضيات اليوناني «إراتوستينس» (حوالي 276 - 194 ق.م) طريقة بسيطة جدًا لفهم هذه الأعداد.

- كتب «إراتوستينس» في البداية الأعداد من 1 إلى 100.
- ثم شطب الرقم 1 لأن له عاملًا واحدًا، وبذلك لا يكون من ضمن الأعداد الأولية.
- ثم وضع دائرة حول الرقم 2 (باعتباره العدد الأولي الأول)، وشطب كل مضاعفات الرقم 2.
- كان الرقم التالي الذي بدون دائرة حوله هو 3، وبذلك يجب أن يكون أوّليًّا، لذا وضع حوله دائرة، ثم شطب كل مضاعفاته.
- كان الرقم التالي الذي بدون دائرة حوله هو 5، وبذلك يجب أن يكون أوليًا، لذا وضع حوله دائرة، ثم شطب كل مضاعفاته.
- كرّر «إراتوستينس» هذه العملية مع كل الأعداد الأولية بداية من 7 فصاعدًا.

كانت نتيجة هذا الأسلوب ما هو ظاهر في الجدول أدناه (الأعداد الأولية مظللة بدلًا من وضع دائرة حولها).

وهذا ما عُرف باسم غربال «إراتوستينس».

شُطِب الرقم 1 لأن له عاملًا واحدًا فقط. - هو نفسه - بذلك لا يكون أوليًا

الأعداد المظللة هي أعداد أولية - عواملها الوحيدة هي نفسها والرقم 1

الأعداد المشطوبة ليست أولية، لأن لها ثلاثة عوامل أو أكثر

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

تُحدّد هذه العملية على نحو مرضٍ الأعداد الأولية الأقل من 100. ومن الممكن أيضًا استخدام «غربال إراتوستينس» لمعرفة الأعداد الأولية الأكبر من 100، وبمساعدة أجهزة الحاسوب العملاقة، يبحث علماء الرياضيات باستمرار عن أعداد أولية أكبر من ذلك.

هل توجد أنماط للأعداد الأولية؟

تُعرَّف الأعداد الأولية على أنها الأعداد التي ليس لها عوامل بخلاف نفسها والرقم 1. لكن ما ليس معروفًا بالقدر الكافي هو أن كل الأعداد الأولية، ما عدا 2 و3، تكون أكبر من مضاعفات الرقم 6 برقم، أو أقل منه برقم. وهناك برهان دقيق للغاية على ذلك: وهو باختصار، كل الأعداد، فيما عدا الأعداد التي تقلّ عن مضاعفات الرقم 6، أو تزيد عنها بمقدار رقم واحد، هي مضاعفات للرقم 2 أو 3، وبذلك لا تكون أولية وفقًا للتعريف.

من الأمور المدهشة والمحبطة في الوقت ذاته فيما يتعلق بالأعداد الأولية هي أنها لا تتطابق مع أيّ نمط واضح، وقد أثارت هذه الحقيقة فضول علماء الرياضيات لدرجة أنهم أعلنوا حاليًا عن جائزة بقيمة 1 مليون دولار تُقدم لأيّ شخص يمكن أن يحلّ ما يُعرف باسم «فرضية ريمان»، إذ

افترض عالم الرياضيات الألماني «برنارد ريمان» (1826 – 1866) في عام 1859 أن هناك رابطًا محتملًا بين الأعداد الأولية وغير الأولية. وتظل هذه حتى الآن المعضلة الرياضياتية الأشهرعلى مستوى العالم، التي لم يُتوصَّل إلى حلها إلى الآن. هل يمكن توقّع العدد الأولي التالي؟

أمن الأعداد الأولية

إن تفرُّد الأعداد الأولية بالعوامل هو ما يجعلها غير مرنة بدرجة كبيرة. فلا يمكن تقسيمها إلى أيّ كسور متساوية، وبذلك فهي عديمة الفائدة إلى حدّ ما بالنسبة إلى حساب العملات، أو أيّ نظام قياس. ومع ذلك، اكتُشِف أن هناك ميزة عظيمة لعدم المرونة الشديدة هذه في بعض التطبيقات التجارية، ولا سيما أمن بطاقات الائتمان والإنترنت.

تعتمد الأنظمة الأمنية عادةً على إحدى التقنيات المعروفة باسم «تشفير المفتاح العمومي». ويرجع أصل هذه التقنية إلى حقيقة بسيطة عن الأرقام الأولية الكبيرة: فهي بسيطة جدًا في عمليات ضربها معًا، لكن مفتاح الحل هو أنه من المستحيل تقريبًا معرفة العددين الأوليين الأصليين، لكن هذه النظرية تنطبق على الأعداد الأولية الكبيرة بما يكفي، ومع ذلك، قد يشيع استخدام أعداد أولية مكونة من 20 رقمًا، أو أكثر في هذه التقنية. فكّر فيها على أنها مشابهة لقفل إلكتروني. إذ يمكنك قفله (عن طريق ضرب العددين الأوليين معًا)، لكن الشخص الوحيد الذي يمتلك المفتاح– أي الذي يعرف العددين الأوليين الذي كان ناتج حاصل ضربهما هذا العدد الطويل جدًا– هو من يمكنه فتحه مرة أخرى. وهذا ما يحافظ على أمان الرسائل المرسلة إلكترونيًا. وفي المرة التالية التي ترسل فيها رسالة بريد إلكتروني، أو تجري مكالمة هاتفية خاصة، أو تقوم بعملية شراء آمنة عبر الإنترنت، حري بك أن تتقدَّم بالشكر والعرفان إلى الأعداد الأولية نظرًا لحقيقة أنك مؤمَّن بحماية فائقة.

الشّفرات: ألغاز رياضياتية

منذ أن بدأ الأشخاص في استخدام وسائل الاتصال المكتوبة، كان هناك مطلب جماعي بإرسال رسائل تمتاز بالخصوصية أو السرية، ومن هنا نشأ فن التشفير (ترجمة الرسائل إلى شفرات سرية). وبالطبع كان للرياضيات دور فعّال في وضع الشفرات وفكّها.

تباديل الضرب الحسابي

تُعرف أبسط الشفرات باسم شفرات الإحلال. وتتضمن هذه الشفرات ببساطة تبديل حرف بآخر، ويمكن فكّها بسهولة. تخيّل الحروف الهجائية وهي مكتوبة مرتين على شريطين من الورق وملفوفة على شكل عجلتين. وعند تدوير عجلة واحدة أو عجلتين بحيث لا تتحاذى الأحرف المتطابقة معًا، يتكوّن عندئذٍ جدول لاستبدال الحروف. وبعد تحريك عجلة واحدة حرفًا بحرف، على سبيل المثال، ستكون الصورة كالتالي:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A

آلة إنيجما

كان من الممكن جدًا أن يخسر الحلفاء الغربيون الحرب العالمية الثانية لولا مساعدة علماء الرياضيات. فقد أتاحت آلات "إنيجما" للتشفير، التي اُعتقد أن شفراتها غير قابلة للفكّ، للألمان إمكانية إرسال رسائل بحرية فيما بينهم دون مخافة أن يستطيع الحلفاء قراءة رسائلهم. لكن حدث أمر جلل، وهو أن عباقرة الرياضيات البريطانيين استطاعوا فكّ شفرات إنيجما، وكان أبرزهم "آلان تورنغ" (1912–1954)، فلقد كانوا مختبئين في مكان بعيد بإحدى المنشآت الحكومية السرية في حديقة "بلتشلي"، بالقرب من لندن، لإنجاز هذه المهمة. وبعد الجهود الضخمة، نجحوا في فك نظام التشفير، وخلال قيامهم بذلك، أحدثوا طفرات في تقنية الحوسبة.

إذا كانت الرسالة السرية التي نريد إرسالها هي كلمة «MOUSE»، فعند استبدال كل حرف من الصف العلوي ليحل محله حرف بالصف السفلي، تتحول كلمة «M O U S E» إلى «N P V T F»، لكن لا تُعدّ هذه الشفرة آمنة، لأن هناك 26 فرضية فقط. حتى البدائل العشوائية التي يمكن الحصول عليها عن طريق إعادة ترتيب الحروف بالعجلة السفلية يمكن فكها بواسطة أيّ محلّل شفرات ذكي.

تصبح الشفرة أقوى إذا لم تكن الحروف موضوعة بالترتيب، مع تغيير عدد مرات الدوران، ليس فقط مع كل رسالة، لكن مع كل حرف يُشفّر. وعليه، فإن الحرف A قد يُشير إلى الحرف B في كلمة والحرف W في الكلمة التالية. وكانت هذه هي الطريقة التي انتهجها مصممو آلة إنيجما (انظر المربع)، ولم تستخدم عجلة دوارة واحدة فحسب، بل خمس عجلات دوارة: وقد تضمَّن جزء من الشفرة الثلاث عجلات الدوارة التي اُختيرت لتركيبها في الآلة. قد يبدو هذا الأمر بسيطًا، لكنه يعني من الناحية الرياضياتية أن العجلات الدوارة قد ينتج عنها أكثر من مليون تبديل مختلف، وكان هذا هو السبب في أن عملية فكّ الشفرات استلزمت الاستعانة بأنبغ العقول الرياضياتية في جيلهم، وقليل من الحظ(في الحقيقة، انطوت آلة إنيجما على مزيد من التعقيدات بلغت إلى حدّ توزيع الشفرات عشوائيًا؛ لتكوين ما يصل إلى عدة تريليونات من الاحتمالات!)*

حاول فكّ هذه الشفرة البسيطة عند تطبيقها على الحروف الهجائية الإنجليزية الموضحة سابقًا:

!Brx duh d qxpehu zlcdug

* عدد الاحتمالات بالضبط هو 5 × 4 × 3 × 26 × 26 × 26. هل يمكنك تخمين السبب؟

(الحلول في صفحة 154)

الفوضى المطلقة!

ربما تكون قد سمعت مقولة إن الفراشة عندما ترفرف بأجنحتها في أمريكا الجنوبية فإنها قد تسبب إعصارًا في نيويورك. إنه إسقاط جيد، لكنه مضلل إلى حدّ ما، لمبدأ يُعرف باسم «نظرية الفوضى».

ماذا لو؟

بعبارات بسيطة، نظرية الفوضى هي فرع من الرياضيات مختصّ باستكشاف سبب وقوع أحداث عشوائية لأسباب غير واضحة. وفي صميم هذه النظرية، تكمن الفكرة القائلة بأن التغييرات الصغيرة جدًا في نظام ما قد تتسبب في موجة من التغييرات الأكثر أهمية، التي لا تتناسب مطلقًا مع التغيير الأصلي.

في حقبة الستينيات من القرن الماضي، كان عالم الأرصاد الجوية «إدوارد لورنتز» (1917–2008) يصمم معادلات يمكن أن يتنبأ من خلالها بالأنماط الجوية، لكنه اكتشف أن أيّ اختلاف طفيف في البيانات الأولية التي أدخلها ينتج عنه تغييرات هائلة في نتائج تجربته. إنه هو الذي أطلق على هذه الظاهرة الاسم الشهير «تأثير الفراشة».

حتى هوليوود اختارت هذه الفكرة، وأنتجت عنها أفلامًا مثيرة للتفكير، مثل Sliding Doors (الأبواب الجرّارة) (عام 1998)

وThe Butterfly Effect (تأثير الفراشة) (عام 2004). ماذا لو استطعت العودة بالزمن إلى الوراء وتغيير شيء صغير– ما مدى الاختلاف الذي كانت ستشهده حياتك؟ ماذا لو لم تنظر مطلقًا في أنحاء الغرفة ولم تقابل شريك حياتك؟ ماذا لو لم يتقابل والداك أبدًا؟

نظرًا لأن «لورينتز» كان عالم أرصاد جوية في الأساس، لم يستطع نشر نتائج أبحاثه في أيّ دوريات متخصصة في علم الرياضيات، لكنه قدّمها لدورية أرصاد جوية بدلًا من ذلك، مما أدى إلى عدم اكتشاف علماء الرياضيات لفكرته إلا بعد مرور سنوات على ذلك. ودُمجت نظرية الفوضى منذ ذلك الحين في النماذج التنبؤية لبعض المجالات، مثل: التغير المناخي والتوقعات الاقتصادية وتخطيط الصحة العامة.

تسديدة غولف مثالية؟

من الطرق البسيطة لتصوّر فكرة الفوضى هو أن تتخيّل لاعب غولف محترفًا عند نقطة الانطلاق. إذا سدّد ما يبدو أنه 10 ضربات متماثلة، فمن المفترض أن تهبط الكرة نظريًا في المكان نفسه كل مرة، لكن لا يحدث ذلك، بالتأكيد، وذلك بسبب فروق طفيفة، مثل: هبّة رياح، أو تأرجح المضرب إلى الخلف بمقدار ربع بوصة إضافي، أو دوران جسده بمقدار جزء من الدرجة. يمكن لأيٍّ من هذه العوامل أن يُحدث فارقًا كبيرًا في موضع الكرة النهائي، ولا شك أن عاملين، أو أكثر منها معًا يمكنها أن تجعل النتيجة خارج التوقعات. فلا يمكن لأحد التأكد من المكان الذي ستهبط فيه الكرة بالضبط في كل مرة، وذلك بفضل حساسيتها للمتغيرات الدقيقة.

كسر النمط

ابتكر 'لورينتز' معادلات توضح طريقة تصرّف الأنظمة عندما تتعرض لتغيرات دقيقة لا يمكن التنبؤ بها، وتسببها في المزيد من المفاجآت. واكتشف أن الرسوم البيانية لمعادلاته لا تبدو أنها تتكرر أبدًا، لكن ينتج عنها نتائج مذهلة، تُعرف باسم أنماط كسورية.

تشترك الكلمة «fractal» التي تعني «كسوري» في أصولها مع اللغة اللاتينية «fracture»، التي تشير إلى الأشكال متعددة الأجزاء التي يهتم بها هذا المجال الحديث نسبيًا في علم الرياضيات. تتحدى الكسور قواعد الهندسة الإقليدية (الدوائر والمثلثات وما شابه)، لكنها تتبع هندستها الخاصة المذهلة استنادًا إلى التكرارات اللانهائية المحتملة على نطاقات مختلفة. وسنناقش هذه الأنماط الاستثنائية في الفقرة التالية.

اكتشاف الكسور

على الرغم من معرفة بعض الأمور عن فكرة الكسور في أوائل القرن السابع عشر، لم يستخدم المصطلح «كسوري» إلا في عام 1975 بواسطة عالم الرياضيات الفرنسي «بينوا ماندلبرو» (1924) لوصف الأشكال التي تظهر بالشكل نفسه عندما تفحص أسفل الميكروسكوب الرياضياتي. ويرجع ذلك إلى أنه في كل مرة تُكبَّر فيها الصورة، نجد أن نمط الجسم يتكرَّرعلى نطاق أصغر.

الأنماط المعقَّدة في الطبيعة

هل درست من قبل نبات السرخس؟ فكل ورقة مكونة من عدة وريقات، وكل منها هو نسخة مصغرة من الورقة الرئيسية. انظر عن كثب وستجد أن كل وريقة مكونة بدورها من وريقات أصغر حجمًا، وهذه أيضًا مماثلة تقريبًا للورقة الأكبر.

مثال آخر معروف وهو ندفة الثلج. تمثل أذرع ندف الثلج أنماطًا كسورية، لأن شكل الذراع يتكرر مع درجات التكبير المختلفة، وتظهر هذه الأشكال متماثلة مع أيّ درجة للتكبير.

هناك ميزة مثيرة للدهشة للكسور، وهي أنه بالرغم من أن الأشكال الهندسية التقليدية لها محيط محدد الطول، فنجد أن محيط الشكل الكسوري، مثل ندفة الثلج لـ «كوخ» (انظر الصورة المقابلة) يمكن أن يكون لانهائيًا.

لفهم السبب وراء ذلك، تخيّل كيف تبدو جزيرة أيسلندا من الفضاء، إنها مثل الإهليلج البسيط، لكن عندما تقترب منها، يبدو إطارها الخارجي أكثر طولًا، مع مجموعة أكثر التفافًا من الرؤوس والمنافذ والشقوق.

عالم بدون أرقام؟

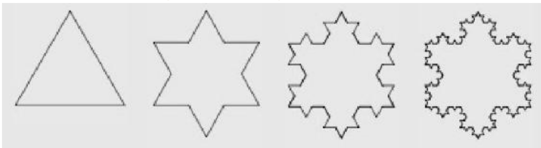
تخيّل أنك ذهبت للتسوق ولا تعرف مقدار المبلغ المالي المفترض أن تدفعه، أو الفكة المتبقية لك من المبلغ. تخيّل أنك تحاول ممارسة أيّ رياضة فيها تسجيل للأهداف وأنت لا تستطيع فهم أن العدد 16 أكبر من 12. تخيّل مدى صعوبة حضورك لأحد الاجتماعات في الوقت المناسب، أوالالتزام بحدّ السرعة المسموح به، إذا كانت لغة الأرقام غريبة عليك.

ندفة الثلج لـ «كوخ»

يرجع أصل هذا المثال الرائع على هندسة الكسور إلى علم الرياضيات وليس الطبيعة. وسُمِّيت على اسم عالم الرياضيات السويدي «هيلغ فون كوخ» (1870–1924)، الذي اكتشفها للمرة الأولى في عام 1904.

ابتداءً بمثلث متساوي الأضلاع، امسح الثلث الأوسط من كل ضلع وارسم مكانه خطين بالطول نفسه لرسم مثلث آخر متساوي الأضلاع متصل بكل جانب من المثلث الأصلي. كرِّر هذه الخطوة مع كل ضلع في الشكل الجديد، ثم كررها مرة أخرى.

عند تكرارها مرتين فقط، تحصل على تطوُّر الأشكال التالي:



من الممكن الاستمرار في تكرار هذا النمط إلى ما لا نهاية.

توجد حقيقة مثيرة للاهتمام في هذا الشكل بصفة خاصة؛ وهي أن مساحة ندفة الثلج لـ»كوخ» الأولى المتخذة شكل النجمة تبلغ 1.6 مرة بالضبط من مساحة المثلث الأصلي. ومع ذلك، مهما كررت نمط إضافة مثلثات جديدة عند الحواف، تظل المساحة (المحسوبة باستخدام ما يُعرف باسم المتسلسلة الهندسية، وهو يعدّ خارج نطاق هذا الكتاب قليلًا) 1.6 مرة بالضبط من مساحة المثلث الأصلي. والافتراض المنطقي لذلك هو أن المحيط الخارجي يمكن أن يصبح طويلًا بشكل لا نهائي، لكن تظل المساحة داخله كما هي دون تغيير!

اللاحساب وعسر الحساب

قد لا تعني الأرقام الكثير بالنسبة إلى بعض الأشخاص. فالعقول اللاحسابية (تشير كلمة «اللاحسابية» إلى معنى «الخاوية من الأرقام») تعاني من صعوبة كبيرة في حساب المجموعات الصغيرة من الأشياء، وهي مهارة معروفة باسم «التمييز الفوري للأعداد»، وتتفاقم المشكلة مع الأعداد الكبيرة، والعلاقات بين الأعداد. وقد لا يستطيع هؤلاء الأشخاص إجراء عمليات جمع بسيطة، وقد لا يتمكّنون حتى من العدّ، أو ترتيب الأعداد تصاعديًا، أو تنازليًا.

قد تنشأ هذه الحالة اللاحسابية عادة من بعض أشكال الإصابة في المخ، تكون جلطة في الأغلب. وقد تنتج أيضًا من الإعاقة الوراثية التي تعرقل عملية فهم الطفل للأرقام. إذا لم تتدهور المشكلة، وتصبح حالة لاحسابية كاملة، يطلق عليها اسم «عسر الحساب»: مثله مثل عسر القراءة، يمكن أن يتفاوت في شدّته. لا يمكن تفسير «عمى الأرقام» دائمًا على أنه صفة وراثية، لكن حالة عسر الحساب الفعلية تتسبّب في

حالة مستمرة من الإحباط؛ لأن الأرقام متغلغلة في نواحي حياتنا جميعها. ولا تزال المعلومات المتعلقة بحالة عسر الحساب في مرحلة النشوء، ونأمل أن نفهم بشكل أفضل السبب الذي يجعل بعض العقول تعاني مع مفاهيم الأعداد التي يفهمها الأغلبية بصورة غريزية تقريبًا.

جولة في العالم غير الواقعي

صادفنا بالفعل بعض الأعداد غير الملموسة – باي (π) وفاي (Φ)، على سبيل المثال، لكن في العوالم المتقدمة للرياضيات، توجد بعض الأعداد الغريبة جدًا بالفعل، ويُطلق على أحدها رمز «i»، ولا يمكن وصفه حتى على أنه حقيقي.

العدد التخيّلي «I»

عندما تضرب أيّ رقم في نفسه، تحصل على عدد مربع: مثال: 5 × 5 = 25. ومعكوس هذا هو الجذر التربيعي، إذ أن √25 = 5. قد تتذكر أيضًا من أيام المدرسة أن حاصل ضرب عددين سالبين معًا يكون عددًا موجبًا دائمًا. لذا فكّر في ذلك: إذا كان 1 × 1 = 1 و-1 × -1 = 1، فهل يوجد جذر بالصيغة -√1؟

الإجابة في الواقع هي «نعم». وجد علماء الرياضيات لعدة قرون أن الجذر -√1 يظهر في المعادلات المعقدة. ونظرًا لأن لهذه المعادلات حلًا حقيقيًا وملموسًا، يجب أن يوجد الجذر -√1 بشكل أو بآخر. لكن بحلول القرن الثامن عشر، عُيِّن الحرف i للجذر -√1، وأصبحت الأعداد المماثلة كلها (الجذور التربيعية للأعداد السالبة) معروفة باسم الأعداد التخيّلية. وقد أحدث الإقرار بوجود هذه الأعداد مزيدًا من التقدم في علوم الفيزياء والهندسة والإلكترونيات. فبدون الأعداد التخيّلية، لم يكن من الممكن أن تخرج بعض الاختراعات إلى النور، مثل: أجهزة الحاسوب، أو السيارات، أو أجهزة التلفزيون، أو الهواتف الجوالة.

> **«معجزة التحليل هذه، وأعجوبة عالم الأفكار هو ما نسميه العدد التخيّلي.»**
>
> غوتفريد فيلهيلم لايبنتز (1646–1716)

الحلول

الفصل الأول

ص 20: 5 أو V أو ㊄

- الإجابة هي 2: تشير الأرقام إلى الأوجه المتقابلة على حجر النرد.
- 5550.55 – 500.55 = 5050؛ كل المسائل الأخرى = 5.
- في تحويل درجات الحرارة: 5° مئوية = 41° فهرنهايت (و 5° فهرنهايت = -15° مئوية).

ص 31–33: تقدم؟

1 أ: 3366 (3400 - 34)
ب: 27.93. (نبدأ بضرب 4 × 7 لنستنتج 28، ثم نطرح 7 أضعاف 0.01.)
2 أ: 300 (نظرًا لوجود 300 نصف في العدد 150)
ب: 1000
3 100 × 100 = 10000
4 درجات الحرارة متعادلة (61° فهرنهايت = 16° مئوية، 82° فهرنهايت = 28° مئوية).
5 أ: 403 (الحد النوني n للمتتالية هو 4n + 3)
ب: 49 حدًا
6 البداية 13 143 144 12 1,188 118.8 237.6
البداية 340 170 85 17 68 340.
لاحظ أنك تنتهي من حيث بدأت؛ نظرًا لأنك قسمت بفاعلية على 20 ثم ضربت في 20، ومن ثم «تراجعت» عن الخطوات الثلاثة الأولى.
7 32145 (هذا المربع لاتيني - انظر صفحة 26)

الفصل الثاني

ص 42: سلاسل الحساب السريع

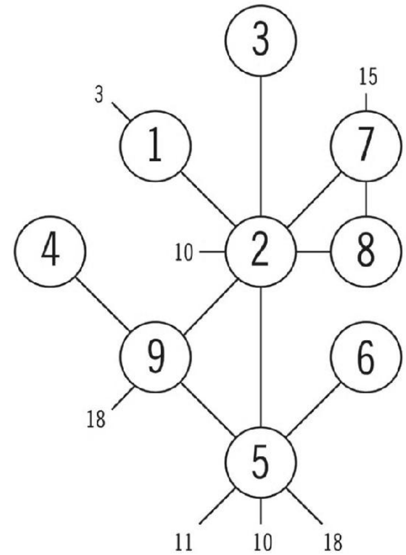
البدء بـ 20 2 4 48 14 42 6 36 3,564

البدء بـ 7 49 539 100 10 2 8 64 70

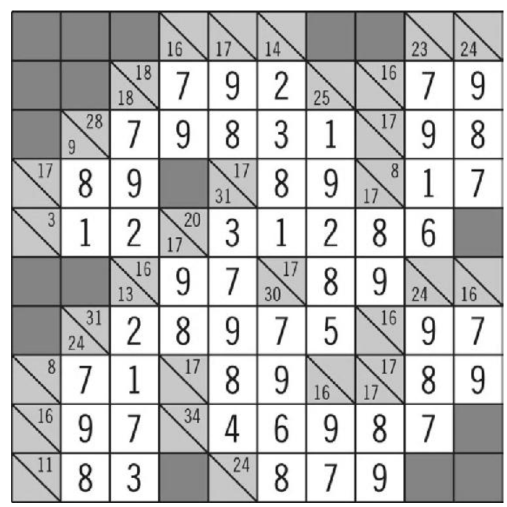
ص 43: العثور على الأنماط

أ- 8 (نضرب أول عددين ونطرح 2 لنحصل على العدد الثالث)
ب- 3 (العدد الثالث هو ضعفا مجموع العددين الأولين)
ت- 19 (العدد الثالث هو تربيع العدد الأول زائد العدد الثاني)

ص 43: الخطوط المتقاطعة



ص 44: كاكورو



الفصل الثالث

ص 67: الحساب باستخدام النسب

- نسبة الخفافيش البنية إلى السوداء هي 20:30، أو 2:3. بما أن 200 تساوي حاصل ضرب 4 × 50، نضرب طرفي النسبة كليهما في 4. إذًا، 30 × 4 = 120 خفاشًا بنيًا.
- أولًا، نحصل على مجموع الأنصبة، الموجودة: 5 + 6 + 7 = 18. 90 ÷ 18 يساوي 5؛ إذًا كل نصيب يتكون من 5 قطع حلوى. بذلك، يحصل «ويليام» على 25 قطعة حلوى (5 × 5)، ويحصل ‹توماس› على 30 (5 × 6)، وتحصل ‹ريبيكا› على 35 (5 × 7).
- لاكتشاف نسبة البلازما في الدم، نطرح نسبة خلايا الدم (45%) من الكمية الكاملة للدم (100%) 100 - 45 = 55. نسبة البلازما إلى الخلايا هي 45:55؛ ويمكن التعبير عن ذلك بشكل أبسط إذا قسمنا كلا الطرفين على 5، لنحصل على 9:11.

ص 86: النظام الثنائي

- 101
- 6

الفصل الرابع

ص 97: النقانق والبطاطس المهروسة

- يعرض متجر «آلز»أفضل سعر للنقانق: 39 بنس × 12 يساوي 4.68 جنيه. في «بامبر بارغينز»، تدفع فقط ثمن 9 نقانق بدلًا من 12، لكن بسعر 53 للقطعة يساوي ذلك 4.77 جنيه. في «كات يور كوستس كورنر مارت»، تدفع أقل من السعر الكامل بـ 10% (بسعر 45 بنس × 12 يساوي 5.40 جنيه)، ومع ذلك يكون الناتج 4.86 جنيه.
- يعرض «كات يور كوستس» أقل سعر للبطاطس - إذ تحصل على الكيلوغرام الكامل مقابل 2.40 جنيه. في «آلز»، تدفع مقابل 10 أكياس × 100 غ، ما يساوي 2.60 جنيه. في «بامبر بارغينز»، يتعين عليك دفع مقابل 5 أكياس × 200 غ، أو ما يساوي 2.45 جنيه.
- المثير في الأمر أنك تحصل على أقل تكلفة مجمعة عند الذهاب إلى «بامبر بارغينز»- حيث تدفع 4.77 جنيه + 2.45 جنيه = 7.22 جنيه. (في «آلز’، من المفترض أن تدفع 4.68 جنيه + 2.60 جنيه، ما يساوي 7.28 جنيه. في «كات يور كوستس كورنر مارت»، يكون المبلغ الإجمالي 4.86 جنيه + 2.40 جنيه = 7.26 جنيه)

ص 104: حساب الفائدة

ينبغي أن تحصل في نهاية الأمر على مبلغين ماليين متماثلين:

أ 463.05 يورو: 400 يورو × $(1.05)^3$ (أي 1.05 × 1.05 × 1.05)

ب 462.33 يورو: 380 يورو × $(1.04)^5$

الفصل الخامس:

ص 124–125: لغز تاريخ الميلاد المشترك

- إن احتمال أن شخصًا بعينه لا يتشارك معك في تاريخ الميلاد كبير جدًا: 365/364، أو 0.99726. لكن احتمال ألا يكون لشخص آخر أيضًا تاريخ الميلاد نفسه هو (365/364 × 365/364)، أو $(365/364)^2$: حوالي 0.99453. يجب أن تتبع هذه الطريقة حتى تصل إلى $(365/364)^{253}$ قبل أن يقلّ هذا الرقم عن 0.5، ليكون 0.499523 تقريبًا. وهذا يثبت، بما يخالف البديهة إلى حدّ ما، أنه يلزم وجود 253 شخصًا في الغرفة قبل أن تكون هناك أكثر من فرصة بأن أحدهم يشاركك تاريخ الميلاد نفسه.
- ما فرص أن يكون تاريخ ميلادك في يوم 1 يوليو مثلي؟ هذه الإجابة أكثر بساطة. لديك 365/1 فرصة لمشاركتك لي تاريخ الميلاد نفسه، إذ يمكن أن تكون قد وُلدت في أيّ يوم من العام بالاحتمالية نفسها. (حرصًا على التوضيح، سنتجاهل التعقيدات الإضافية التي تتسبب فيها السنوات الكبيسة).

الفصل السادس

ص 134: أداء الصفر الغريب

يقصد مذيع النشرة الجوية أنك ستشعر ببرودة أكثر بكثير من اليوم، لكن من الناحية الحسابية، تظل نتيجة حاصل الضرب

0 × 2 هي 0 فقط.

ص 139–140: تباديل الضرب الحسابي

لفك الشفرة:

!Brx duh d qxpehu zlcdug

يجب عليك استبدال كل حرف بحرف يسبقه بأربع خانات في الترتيب الهجائي: وبذلك، الحرف D سيصبح A، والحرف C سيصبح Z، والحرف B سيصبح Y، وهكذا. وبتطبيق هذه الطريقة، ستكتشف معلومات مهمة، وهي: **أنك محترف أرقام!**

إن السبب وراء احتمالات عمل «آلة إنيجما» وفقًا للعملية الحسابية 5 × 4 × 3 × 26 × 26 × 26

هو كالتالي: هناك باختصار خمسة اختيارات محتملة للعجلة الدوارة بالنسبة للخانة الأولى، ولكل واحد من هذه الخيارات 4 احتمالات متبقية للخانة الثانية، و3 للثالثة. وهذا يعني أن هناك 60 طريقة مختلفة (5 × 4 × 3) لوضع العجلات الدوارة في الآلة.

أما بالنسبة لكل عجلة من العجلات الدوارة، هناك 26 موضعًا محتملًا (نظرًا لعدد الأحرف البالغ 26 في كل عجلة دوارة)، مما يوصّلنا إلى العملية الحسابية الموضحة أعلاه – وهو ما يزيد عن مليون احتمال.

مراجع أخرى للاطلاع

تشتمل هذه المختارات على كتب تستعرض مزيدًا من الجهود الاستكشافية للرياضيات، بالإضافة إلى كتب أخرى تساعدك على توسيع مداركك الذهنية.

Acheson, David *1089 and All That (وكل ذلك)*, Oxford University Press 2002

Bracey, Ron *IQ Power-Up (تحسين نسبة الذكاء): 101 Ways to Sharpen Your Mind*, Duncan Baird Publishers 2008

Bridger, Darren and David Lewis *Think Smart Act Smart (فكّر بذكاء، تصرّف بذكاء): 101 Ways to Be Effective and Decisive*, Duncan Baird Publishers 2008

Eastaway, Rob *Out of the Box (خارج الصندوق): 101 Ideas for Thinking Creatively*, Duncan Baird Publishers 2007

Gardner, Martin *Mathematical Magic Show (حيل سحرية رياضياتية)*, Penguin Books 1986

Mankiewicz, Richard *The Story of Mathematics* (قصة الرياضيات), Weidenfeld & Nicolson 2000/ Princeton University Press 2004

Moore, Gareth *Keep Your Brain Fit (حافظ على لياقتك الذهنية): 101 Ways to Tone Your Mind*, Duncan Baird Publishers 2009

Pappas, Theoni *The Joy of Mathematics (بهجة الرياضيات)*, Wide World Publishing (US) 1993

Pickover, Clifford A. *A Passion for Mathematics (شغف الرياضيات)*, John Wiley & Sons 2005

du Sautoy, Marcus *The Music of the Primes (نغم الأعداد الأولية)*, Harper Perennial 2004

Tipper, Michael *Memory Power-Up: 101 Ways to Instant Recall (تحسين الذاكرة: 101 طريقة لاسترجاع المعلومات فوريًا)*, Duncan Baird Publishers 2007

الموقع الإلكتروني للمؤلف

إن رسالة «أندرو جيفري» في الحياة هي إقناع الناس بأن بمقدورهم الاستفادة من الرياضيات بشكل أكبر من ما يظنون. كما أنه يعمل لصالح مؤسسات مستقلة ترغب في توصيل رسالتها المؤسسية في معارض تجارية ومؤتمرات بأسلوب لطيف وشيق. لمزيد من التفاصيل، تفضل بزيارة الموقع الإلكتروني لـ«أندرو» www.andrewjeffrey.co.uk

إهداءات من المؤلف

أنا في غاية الامتنان لمعرفة هذا الكم من الاشخاص غير العاديين. فأنا أؤمن بشدة بأنني محاط بأشخاص جميعهم أفضل مني بشكل أو بآخر، وجميع من يرد ذكرهم أدناه هم أمثلة حية لتلك الفلسفة!

عائلتي وأصدقائي الذين غبت عنهم طوال العام الماضي - أود أن أهديهم هذا الكتاب الذي هو نتاج فترة الابتعاد المؤقت هذه، وآمل أن يستحق ذلك.

الدكتور «توني وينغ» معلمي الأول في الرياضيات، الذي دفعني عدم إجابته عن أيّ من أسئلتي كواحد من طلابه إلى التبحر في المسائل التربوية، والرياضياتية بطريقة لم يتمكن منها أيّ شخص آخر.

«كارولين بول»، المحررة البارعة، وواحدة من القلائل الذين لديهم قدرة على إضفاء بعض الترتيب والنظام على أفكاري المبعثرة. وهي فوق كل شيء شخصية تتسم بالحكمة، ورقة القلب والتميز عن الجميع. كما أن الموهوبة «كاتي جون» أضافت أيضًا رؤيتها المتعمقة وتوجيهها- فثلاثة عقول حتمًا أفضل من عقل واحد. «روب إيستاواي» الصديق والمؤلف الرياضياتي الزميل، وهو من اقترح علي بأن أبدأ بهذا العمل قبل أيّ شيء! وهو يشترك معي في حب الرياضيات، وأنا دائمًا ما يدفعني الوقت الذي أمضيه معه للعمل والإنجاز.

«ستيفن فروغات» الصديق طيب المعشر، والزميل الساحر والرياضياتي، والموسيقي، والمجنون، وهو من كنت أشاركه الجعة وحيل ألعاب الورق، والمأكولات المتبلة بالبهارات الشهية، والمقتطفات المذهلة للجبر، وذلك بشكل متزامن في بعض الأحيان!

وأخيرًا زوجتي «آليسون» التي هي أكثر جمالًا مما تدرك هي، التي من دونها بصدق لكان كل ذلك مجرد شتات.

حقوق الصور

صفحة 125، صفحة 126 فوتوسيرش
صفحة 143 فيتشر بيكس

تم اتخاذ كل عناية واجبة لحماية حقوق النشر لحامليها؛ ومع ذلك، إن سقط منا سهوًا أيّ شخص، فإننا نعتذر له، وسوف نصحح ذلك الخطأ في الإصدارات المستقبلية حال علمنا بذلك.

Table of Contents

المحتويات